

Rafał WISŁA
Katarzyna FILIPOWICZ
Tomasz TOKARSKI

Zróżnicowanie rozwoju ekonomicznego krajów UE na podstawie grawitacyjnego modelu wzrostu

Streszczenie. *Artykuł ma na celu przedstawienie zróżnicowania rozwoju ekonomicznego krajów Unii Europejskiej (UE) w latach 2000—2015 oraz symulacje zmian wydajności pracy w perspektywie do 2050 r. W badaniu wykorzystano dwa agregaty makroekonomiczne opisujące dynamikę procesów rozwojowych, tj. wydajność pracy oraz kapitał rzeczowy przypadający na pracującego w powiązaniu z tzw. efektami grawitacyjnymi. Oparto się na danych Europejskiej Komisji Gospodarczej (United Nations Economic Commission for Europe — UNECE).*

Wyniki skłaniają do sformułowania dwóch kluczowych wniosków. Po pierwsze, przy założeniu utrzymania średniej krajowej stopy inwestycji z okresów 2000—2015, 2000—2008 i 2009—2015 w perspektywie do 2050 r. najsilniejszą średnioroczną dynamikę zmian wydajności pracy obserwuje się w krajach zaliczanych do grupy postkomunistycznej. Po drugie, przyjęcie dla okresu 2016—2050 średniej stopy inwestycji dla gospodarki UE z okresów 2000—2015, 2000—2008 i 2009—2015 skłania do przypuszczenia, że w 2050 r. wydajność pracy trzech dużych grup krajów objętych analizą (UE-28, UE-15 i kraje postkomunistyczne) będzie się kształtować na bardzo podobnym poziomie.

Słowa kluczowe: zróżnicowanie rozwoju, grawitacyjny model wzrostu, wydajność pracy.

JEL: E27, O11

Celem niniejszego opracowania jest analiza przestrzennego zróżnicowania rozwoju ekonomicznego krajów Unii Europejskiej (UE) w latach 2000—2015¹

¹ Wybór tego przedziału czasu wynika z dostępności danych statystycznych na stronie Europejskiej Komisji Gospodarczej (United Nations Economic Commission for Europe — UNECE; <http://w3.unece.org>).

oraz symulacja zmian wartości wybranego parametru makroekonomicznego — wydajności pracy — do roku 2050. Do osiągnięcia tego celu wykorzystano dwa agregaty makroekonomiczne opisujące dynamikę procesów rozwojowych, tj. wydajność pracy (PKB na pracującego) oraz kapitał rzeczowy przypadający na pracującego w powiązaniu z tzw. efektami grawitacyjnymi w krajach UE. Analizy przeprowadzono z wykorzystaniem grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego zaproponowanego w pracach: Mroczek, Tokarski i Trojak (2014) oraz Filipowicz i Tokarski (2016a).

ISTOTA GRAWITACYJNEGO MODELU WZROSTU GOSPODARCZEGO

Grawitacyjny model wzrostu gospodarczego nawiązuje konstrukcją do modelu wzrostu Solowa (1956), a właściwie stanowi jego rozszerzenie o tzw. efekt grawitacyjny. W modelu zakłada się, że pomiędzy skończoną liczbą N krajów lub regionów ($N \geq 2$) występują pewne oddziaływania. Są one opisane przez indywidualne oraz łączne efekty grawitacyjne. Zbiór N krajów, pomiędzy którymi zachodzą owe interakcje, oznaczono jako G (w przypadku krajów UE $G = \{1, 2, \dots, 28\}$).

Proces produkcyjny w j -tym kraju opisany jest przez funkcję wydajności pracy opartą na funkcji produkcji typu Cobba-Douglasa (Żółtowska, 1997; Tokarski, 2009, 2011)²:

$$\forall j \in G y_j(t) = a_j (g_j(t))^\beta (k_j(t))^\alpha \quad a_j > 0 \wedge \alpha, \beta \in (0,1) \wedge \beta < \frac{1-\alpha}{2} \quad (1)$$

gdzie:

y_j — wydajność pracy w j -tym kraju,

k_j — kapitał rzeczowy przypadający na pracującego w j -tym kraju,

a_j — część łącznej produktywności czynników produkcji wynikająca z działania efektów indywidualnych w j -tym kraju³,

g_j^β — część łącznej produktywności czynników produkcji wynikająca z działania efektów grawitacyjnych w j -tym kraju,

g_j — łączny efekt grawitacyjny oddziałujący na j -ty kraj.

² Zakłada się, że wszystkie występujące dalej zmienne makroekonomiczne są różniczkowalnymi funkcjami czasu t . Zapis $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ oznacza pierwszą pochodną zmiennej x po czasie t , czyli przyrost wartości zmiennej x w momencie t .

³ Zróżnicowanie a_j może wynikać m.in. ze zróżnicowania kapitału ludzkiego w analizowanych krajach lub być skutkiem różnych instytucjonalnych albo sektorowych struktur badanych gospodarek (modele Lucasa, 1988 czy Mankiwa, Romera i Weila, 1992, por. też Malaga i Kliber, 2007 lub Roszkowska, 2013).

Ponadto α i β oznaczają elastyczność wydajności pracy względem (kolejno) kapitału na pracującego i łącznego efektu grawitacyjnego.

Indywidualne efekty grawitacyjne, łączące kraj j -ty z krajem m -tym, opisują równania⁴:

$$\forall j, m \in G \wedge m \neq j \quad g_{jm}(t) = \frac{k_j(t)k_m(t)}{d_{jm}^2} \quad (2)$$

gdzie d_{jm} — odległość łącząca stolicę kraju j -tego ze stolicą kraju m -tego.

Łączny efekt grawitacyjny w gospodarce j -tej stanowi średnią geometryczną z indywidualnych efektów grawitacyjnych, czyli:

$$\forall j \in G \quad g_j(t) = \sqrt[N-1]{\prod_{m \in G \wedge m \neq j} g_{jm}(t)} \quad (3)$$

Równania przyrostów kapitału na pracującego (podobnie jak w oryginalnym modelu Solowa) w każdym z krajów dane są wzorami:

$$\forall j \in G \quad \dot{k}_j(t) = s_j y_j(t) - \mu_j k_j(t) \quad s_j \in (0,1) \wedge \mu_j > 0 \quad (4)$$

gdzie:

s_j — stopa inwestycji w j -tym kraju,

μ_j — stopa ubytku kapitału na pracującego w j -tym kraju, będąca sumą stopy deprecjacji kapitału i stopy wzrostu liczby pracujących.

Założenia te można sprowadzić do następującego układu równań różniczkowych (Mroczek i in., 2014):

$$\forall j \in G \quad \dot{k}_j(t) = \frac{s_j a_j}{d_j^{\gamma\beta}} \prod_{m \in G \wedge m \neq j} (k_m(t))^{\frac{\beta}{N-1}} (k_j(t))^{\alpha+\beta} - \mu_j k_j(t) \quad (5)$$

gdzie d_j — średnia geometryczna z odległości stolicy j -tego kraju do stolic pozostałych krajów ($d_j = \sqrt[N-1]{\prod_{m \in G \wedge m \neq j} d_{jm}}$).

⁴ Równania (2) bezpośrednio nawiązują do prawa powszechnej grawitacji Newtona, w którym siła, z jaką dwa ciała oddziałują na siebie, jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas oraz odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

Układ równań (5) ma nietrywialny, asymptotycznie stabilny punkt stacjonarny, który z perspektywy ekonomicznej jest punktem długookresowej równowagi modelu. Zachodzą w nim następujące związki (Mroczek i in., 2014):

$$\forall j \in G \ln k_j^* = \frac{\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)} \sum_{m \in G} \ln \left(\frac{s_m a_m}{\mu_m d_m^{\gamma\beta}} \right) + \ln \left(\frac{s_j a_j}{\mu_j d_j^{\gamma\beta}} \right)}{1 - \alpha - \frac{N-2}{N-1} \beta} \quad (6)$$

oraz

$$\begin{aligned} \forall j \ln y_j^* = & \ln \frac{a_j}{d_j^{\gamma\beta}} + \frac{\alpha + \frac{N-2}{N-1} \beta}{1 - \alpha - \frac{N-2}{N-1} \beta} \ln \frac{s_j a_j}{\mu_j d_j^{\gamma\beta}} + \\ & + \frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta) \left(1 - \alpha - \frac{N-2}{N-1} \beta\right)} \sum_{m \in G} \ln \frac{s_m a_m}{\mu_m d_m^{\gamma\beta}} \end{aligned} \quad (7)$$

Z równań (6) i (7) wynika, że w warunkach długookresowej równowagi analizowanego modelu wzrost kapitału i produkcja przypadające na pracującego w danym kraju są tym większe, im:

- wyższa jest stopa inwestycji s_j oraz niższa jest stopa ubytku kapitału na pracującego μ_j w tym kraju;
- bardziej centralnie położony jest dany kraj (czyli im niższa jest średnia geometryczna z odległości d_{jm});
- wyższa jest średnia geometryczna $\sqrt[N-1]{\prod_{m \in G \wedge m \neq j} s_m}$ ze stóp inwestycji w pozostałych krajach oraz niższa jest średnia geometryczna $\sqrt[N-1]{\prod_{m \in G \wedge m \neq j} \mu_m}$ ze stóp ubytku kapitału na pracującego w tych krajach;
- większe są efekty indywidualne charakteryzujące kraj j -ty a_j , a także wyższa jest średnia geometryczna z efektów indywidualnych $\sqrt[N-1]{\prod_{m \in G \wedge m \neq j} a_m}$ w pozostałych krajach (Mroczek i in., 2014; Filipowicz i Tokarski, 2016a).

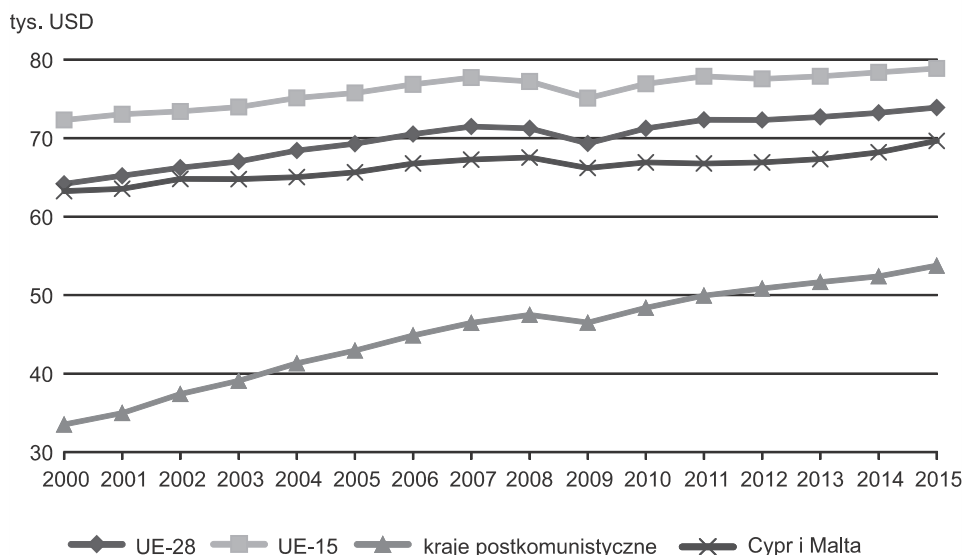
ZRÓŻNICOWANIE WYDAJNOŚCI PRACY, KAPITAŁU RZECZOWEGO PRZYPADAJĄCEGO NA PRACUJĄCEGO I EFEKTU GRAWITACYJNEGO W KRAJACH UE

Na potrzeby badania wyróżniono cztery grupy krajów UE:

- wszystkie kraje (UE-28);
- kraje sprzed rozszerzenia UE w 2004 r., czyli tzw. starej UE (UE-15);
- kraje postkomunistyczne, będące obecnie członkami UE;
- Cypr i Maltę.

Na wyk. 1 pokazano trajektorie wydajności wyróżnionych grup krajów.

WYKR. 1. WYDAJNOŚĆ PRACY W GRUPACH KRAJÓW UE
(ceny stałe z 2015 r.)



Źródło: obliczenia własne na podstawie danych UNECE (<http://w3.unece.org/PXWeb/en>).

Z wyk. 1 oraz z danych statystycznych dotyczących wydajności pracy w krajach UE w analizowanym okresie (np. Filipowicz i Tokarski, 2016b) wynika, co następuje:

- w UE-28 wydajność pracy⁵ wzrosła z 64,2 tys. USD w 2000 r. do 71,2 tys. USD w 2008 r. oraz do 73,9 tys. USD w 2015 r. W krajach UE-15 wynosiła ona odpowiednio: 72,3 tys. USD, 77,2 tys. USD oraz 78,9 tys. USD, w krajach postkomunistycznych: 33,5 tys. USD, 47,5 tys. USD i 53,8 tys. USD, a na Cyprze i Malcie: 63,3 tys. USD, 67,5 tys. USD oraz 69,7 tys. USD. Oznacza to, że w analizowanym okresie wydajność pracy rosła w krajach UE w średniorocznym tempie 0,95%; najszybciej wzrost ten następował w krajach postkomunistycznych (3,20%), następnie na Cyprze i Malcie (0,64%), najwolniej zaś w starych krajach UE (0,58%). Przed światowym kryzysem finansowym (czyli przed rokiem 2008) średnioroczna stopa wzrostu PKB na pracującego w UE-28 była równa 1,31%, w krajach postkomunistycznych — 4,46%, a w krajach UE-15 oraz na Cyprze i Malcie — po 0,82%. W latach 2009—2015 jej wartość spadła do (odpowiednio): 0,53%, 0,30%, 1,79% oraz 0,44%;
- luka rozwojowa pod względem PKB na pracującego między krajami postkomunistycznymi a Cyprzem i Maltą była większa niż 15 lat;

⁵ Ta i wszystkie podane dalej wielkości makroekonomiczne wyrażone w jednostkach pieniężnych przeliczono na ceny stałe przy parytecie siły nabywczej z 2015 r.

- w wyniku zróżnicowania stopy wzrostu wydajności pomiędzy badanymi grupami krajów wydajność pracy w krajach postkomunistycznych wzrosła z 46,3% wydajności pracy w UE-15 w 2000 r. do 61,5% w 2008 r. oraz 68,2% w 2015 r., a na Cyprze i Malcie — do 87,5% w 2000 r. i 88,3% w 2008 r. Świadczy to o tym, że kraje postkomunistyczne w latach 2000—2015 znacznie zniwelowały dystans rozwojowy w stosunku do krajów starej UE, natomiast dystans między Cyprzem i Maltą a UE-15 właściwie się nie zmienił;
- w dużych gospodarkach starej UE wydajność pracy wzrosła: we Francji z 74,7 tys. USD w 2000 r. (co stanowiło wówczas 116,4% średniej wydajności pracy w badanej grupie krajów) do 82,4 tys. USD (111,5%) w 2015 r., w Hiszpanii — odpowiednio z 68,0 tys. USD (105,9%)⁶ do 75,6 tys. USD (102,3%), w Niemczech — z 68,2 tys. USD (106,2%) do 74,8 tys. USD (101,2%), w Wielkiej Brytanii — z 76,8 tys. USD (119,7%) do 87,2 tys. USD (118,0%), zaś we Włoszech — z 78,0 tys. USD (121,5%) do 73,3 tys. USD (99,1%). W krajach Grupy Wyszehradzkiej natomiast wydajność pracy rosła w omawianym okresie odpowiednio: w Czechach — z 41,6 tys. USD (64,8%) do 57,6 tys. USD (78,0%), w Polsce — z 35,2 tys. USD (56,5%) do 56,2 tys. USD (76,1%), na Słowacji — z 36,6 tys. USD (56,9%) do 59,5 tys. USD (80,5%) oraz na Węgrzech — z 40,7 tys. USD (63,4%) do 53,6 tys. USD (72,6%).

Z uwagi na to, że w witrynie UNECE (<http://w3.unece.org/PXWeb/en>) autorzy nie znaleźli danych statystycznych dotyczących zasobów kapitału rzeczowego w krajach UE, zasoby te (niezbędne do obliczenia kapitału na pracującego oraz efektu grawitacyjnego) oszacowano według prostej procedury:

1. Wykorzystano równanie akumulacji kapitału o postaci⁷

$$\Delta K_t = I_t - \delta K_{t-1} \quad (8)$$

gdzie:

- K_t — zasób kapitału rzeczowego w roku t ,
 I_t — strumień inwestycji w ów zasób,
 $\delta \in (0; 1)$ — stopa deprecjacji kapitału rzeczowego.

Z równania (8) wynika, że:

$$K_t = I_t + (1 - \delta)K_{t-1}$$

⁶ Wysoki (w stosunku do Niemiec i Wielkiej Brytanii) poziom wydajności pracy w gospodarce hiszpańskiej wynikał w dużej mierze z wysokiego bezrobocia strukturalnego. Stosunek liczby pracujących do liczby ludności w tym kraju (w latach 2000—2015 średnio 42,6%) jest znacznie mniejszy niż w gospodarce niemieckiej (49,8%) i brytyjskiej (47,2%).

⁷ Dla uproszczenia zapisów w równaniach (8) i (9) pominięto subskrypty i odnoszące się do kolejnych krajów.

co prowadzi do zależności

$$K_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} (1 - \delta)^\tau I_{t-\tau} \quad (9)$$

2. Ponieważ wyrażenia $(1 - \delta)^\tau$ w równaniu (9) są elementami malejącego ciągu geometrycznego, a zazwyczaj $I_t > I_{t-1}$, to również wyrażenia $(1 - \delta)^\tau I_{t-\tau}$ są elementami pewnego malejącego ciągu zbieżnego do zera. Zachodzi zatem przybliżona równość:

$$K_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} (1 - \delta)^\tau I_{t-\tau} \approx \sum_{\tau=0}^n (1 - \delta)^\tau I_{t-\tau} \quad (10)$$

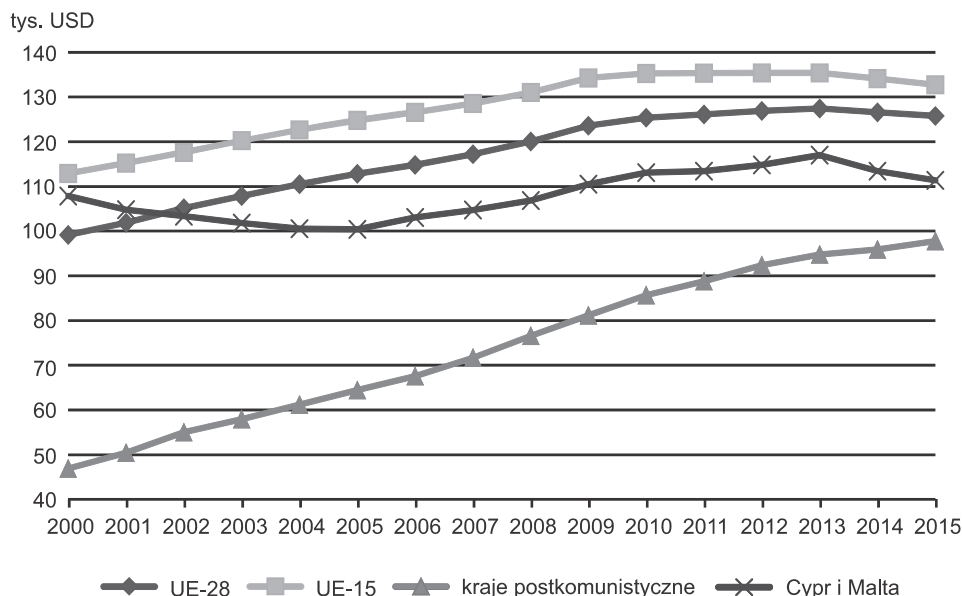
przy czym im dłuższy jest horyzont czasowy (czyli im większe jest n), tym lepsze (dokładniejsze) jest przybliżenie (10). Ponieważ — jak już wspomniano — w witrynie <http://w3.unece.org/PXWeb/en> dostępne są jedynie dane o inwestycjach w krajach UE za lata 1990—2015, zatem w celu oszacowania kapitału rzeczowego za lata 2000—2015 autorzy wykorzystali równanie (10), przyjmując $n = 10$ i stopę deprecjacji kapitału δ na poziomie 5%⁸.

Zastosowanie przedstawionej procedury pozwoliło na oszacowanie kapitału rzeczowego za lata 2000—2015 na podstawie danych statystycznych z lat 90. XX w. dotyczących wielkości nakładów inwestycyjnych. To zaś umożliwiło oszacowanie kapitału na pracującego w analizowanych grupach krajów (wykr. 2).

Z wykr. 2 można wyciągnąć następujące wnioski:

- oszacowany kapitał na pracującego w grupie UE-28 w 2000 r. wynosił średnio 99,1 tys. USD, w UE-15 — 112,9 tys. USD, w krajach postkomunistycznych — 46,9 tys. USD, zaś na Cyprze i Malcie — 107,8 tys. USD. Tym samym wartość kapitału na pracującego w krajach postkomunistycznych oraz na Cyprze i Malcie stanowiła odpowiednio 41,6% i 95,5% wartości tej zmiennej makroekonomicznej w krajach UE-15;
- wartość owej zmiennej w 2008 r. w grupie UE-28 wynosiła 120,1 tys. USD, w UE-15 — 131,0 tys. USD, w krajach postkomunistycznych — 76,6 tys. USD (58,5% wartości dla UE-15), a na Cyprze i Malcie — 106,9 tys. USD (spadek do 81,6% wartości dla UE-15);
- w 2015 r. było to: 125,8 tys. USD w UE-28, 132,7 tys. USD w UE-15, 97,7 tys. USD w krajach postkomunistycznych (73,6% kapitału na pracującego w UE-15) oraz 111,3 tys. USD na Cyprze i Malcie (83,9% wartości dla UE-15);

⁸ Oszacowane na podstawie równania (10) zasoby kapitału rzeczowego są jedynie przybliżoną wartością owej zmiennej makroekonomicznej. Przybliżenia te uwzględniają tylko zasoby kapitału rzeczowego powstałe w wyniku inwestycji realizowanych w ostatnich 10 latach, zatem zazwyczaj opisują one względnie najnowocześniejsze (a tym samym — najbardziej produktywne) zasoby kapitałowe.

**WYKR. 2. OSZACOWANIE KAPITAŁU NA PRACUJĄCEGO W GRUPACH KRAJÓW UE
(ceny stałe z 2015 r.)**


Źródło: jak przy wyk. 1.

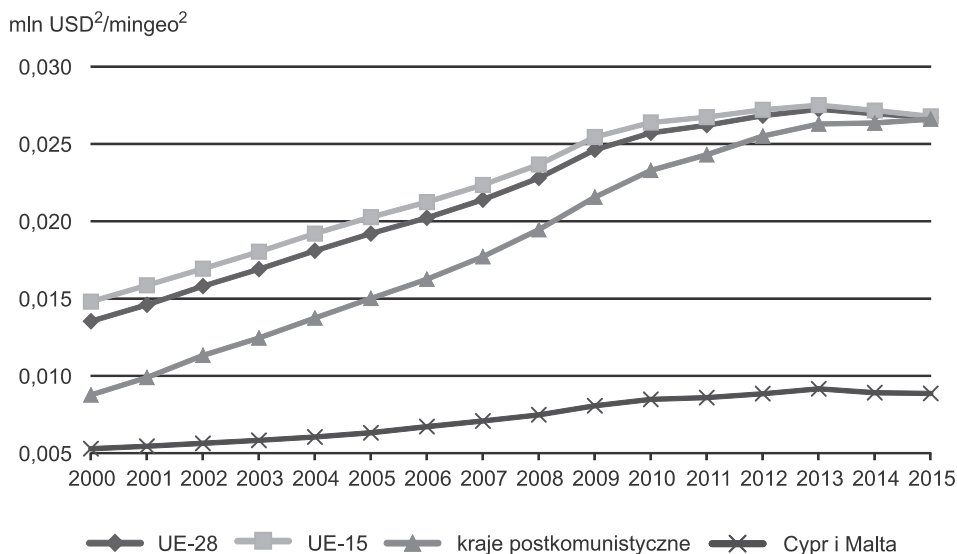
- ponieważ kraje postkomunistyczne należące do UE nie osiągnęły w 2015 r. wartości kapitału na pracującego Cypru i Malty z 2000 r., zatem również pod względem tej zmiennej luka rozwojowa między omawianymi dwoma grupami krajów przekraczała 15 lat;
- na podstawie porównania średniorocznej stopy wzrostu oszacowanego kapitału na pracującego w analizowanych grupach krajów zarówno w całym badanym okresie, jak i w latach 2000—2008 oraz 2009—2015 można stwierdzić, że ponieważ w latach 2000—2015 średnia stopa wzrostu owej zmiennej w UE-28 wynosiła 1,60%, w UE-15 — 1,08%, w krajach postkomunistycznych — 5,01%, a na Cyprze i Malcie — 0,21%, to w pierwszych 15 latach XXI w. nastąpiła bardzo szybka konwergencja (pod względem analizowanej zmiennej) postkomunistycznych członków UE do pozostałych jej członków. Z kolei porównanie stopy wzrostu oszacowań kapitału na pracującego w latach 2000—2008 (2,42% w UE-28, 1,88% w UE-15, 6,31% w krajach postkomunistycznych oraz -0,11% na Cyprze i Malcie) i 2009—2015 (0,67% w UE-28, 0,18% w UE-15, 3,54% w krajach postkomunistycznych oraz 0,59% na Cyprze i Malcie) pozwala zauważyć, że od rozpoczęcia światowego kryzysu (2008) w każdej grupie krajów poza Cyprem i Malcią spadło tempo akumulacji kapitału i w okresie 2009—2015 było niższe niż przed rokiem 2008;
- we Francji oszacowany kapitał na pracującego wzrósł z 121,8 tys. USD (122,9% UE-28) w 2000 r. do 152,4 tys. USD (121,2%) w 2015 r., w Hiszpanii

— z 110,5 tys. USD (111,5%) do 154,0 tys. USD (122,5%), w Niemczech — z 116,2 tys. USD (117,3%) do 120,4 tys. USD (95,7%), w Wielkiej Brytanii — z 104,1 tys. USD (105,0%) do 116,1 tys. USD (92,3%), zaś we Włoszech — z 116,2 tys. USD (117,2%) do 125,5 tys. USD (99,8%). W krajach Grupy Wyszehradzkiej wskaźniki te w latach 2000 i 2015 wynosiły odpowiednio: w Czechach — 90,3 tys. USD (91,1%) i 124,3 tys. USD (98,8%), w Polsce — 42,7 tys. USD (43,0%) i 87,0 tys. USD (69,2%), na Słowacji — 73,5 tys. USD (74,2%) i 106,0 tys. USD (84,3%) oraz na Węgrzech — 58,4 tys. USD (58,9%) i 94,2 tys. USD (74,9%).

Na podstawie dokonanych uprzednio oszacowań kapitału na pracującego oraz ze wzorów (2) i (3) policzono wartość łącznego efektu grawitacyjnego w krajach UE w latach 2000—2015. Przy obliczaniu odległości d_{jm} wykorzystano współrzędne geograficzne stolic krajów unijnych oraz zastosowano twierdzenie Pitagorasa; w ten sposób uzyskano odległości w linii prostej pomiędzy parami stolic, wyrażone w minutach geograficznych (dalej: mingeo). Ponieważ wyszacowany kapitał na pracującego wyrażony jest w tys. USD, iloczyny $k_{jt}k_{mt}$ wyrażono w mln USD², a zatem wartości efektu grawitacyjnego są podane w mln USD²/mingeo²⁹.

Na wyk. 3 zilustrowano kształtowanie się trajektorii efektu grawitacyjnego w krajach UE-28, UE-15, krajach postkomunistycznych oraz na Cyprze i Malcie.

WYKR. 3. EFEKT GRAWITACYJNY W GRUPACH KRAJÓW UE
(ceny stałe z 2015 r.)



Źródło: jak przy wyk. 1.

⁹ Analogicznie do jednostek miar w fizyce: przyspieszenie mierzy się w m/s², zaś siłę w Newtonach, a $N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$.

Z wykr. 3 wynika, że:

- w grupie UE-28 efekt grawitacyjny wzrósł z 0,0135 mln USD²/mingeo² w 2000 r. do 0,0267 mln USD²/mingeo² w 2015 r. W całym analizowanym przedziale czasu średnioroczna stopa wzrostu tej zmiennej wynosiła 4,64%, w latach 2000—2008 — 6,74%, natomiast w latach 2009—2015 — tylko 2,29%;
- wśród członków „starej” Unii wartość efektu grawitacyjnego wzrosła z 0,0148 mln USD²/mingeo² w 2000 r. do 0,0268 mln USD²/mingeo² w 2015 r. W latach 2000—2015 średnie tempo wzrostu tej zmiennej w UE-15 wynosiło 4,03%, w latach 2000—2008 — 6,04%, zaś w latach 2009—2015 — 1,78%;
- w krajach postkomunistycznych efekt grawitacyjny w roku 2000 wynosił zaledwie 0,0088 mln USD²/mingeo², a w roku 2015 osiągnął wartość bardzo zbliżoną do charakteryzującej UE-15 (0,0266 mln USD²/mingeo²). Było to wynikiem, po pierwsze, znacznie szybszej akumulacji kapitału rzeczowego w tych krajach niż wśród pozostałych członków UE (wykr. 2), a po drugie — bardzo korzystnego (ze względu na efekt grawitacyjny) położenia geograficznego;
- średnioroczna stopa wzrostu efektu grawitacyjnego w postkomunistycznych krajach UE wynosiła 7,68% w całym badanym okresie, 10,48% — w latach 2000—2008 oraz 4,57% w latach 2009—2015;
- wartość efektu grawitacyjnego Cypru i Malty, położonych peryferyjnie, była bardzo mała (w 2000 r. — 0,0053 mln USD²/mingeo², w 2015 r. — 0,089 mln USD²/mingeo²). Średnioroczna stopa wzrostu efektu grawitacyjnego również była znacznie niższa niż w pozostałych gospodarkach UE (3,49% w całym badanym okresie, 4,42% w latach 2000—2008 oraz 2,45% w okresie 2009—2015).

W grupie dużych gospodarek UE-15 najwyższy efekt grawitacyjny notowano w Niemczech (w 2000 r. 0,0227 mln USD²/mingeo², czyli 168,1% średniej wartości tego efektu w UE-28, a w 2015 r. odpowiednio 0,0376 mln USD²/mingeo² i 140,6%), następnie we Włoszech (w 2000 r. 0,0159 mln USD²/mingeo², czyli 117,5% wartości tego efektu w UE-28, a w 2015 r. odpowiednio 0,0237 mln USD²/mingeo² i 102,1%), we Francji (w 2000 r. 0,0141 mln USD²/mingeo², czyli 104,3% , a w 2015 r. 0,0280 mln USD²/mingeo², czyli 104,7%), w Wielkiej Brytanii (w 2000 r. 0,0093 mln USD²/mingeo², czyli 68,9%, a w 2015 r. 0,0165 mln USD²/mingeo², czyli 61,9%) i w Hiszpanii (0,0056 mln USD²/mingeo², czyli 41,1% w 2000 r. i 0,0122 mln USD²/mingeo², czyli 45,8% w 2015 r.).

W krajach Grupy Wyszehradzkiej bardzo podobnym poziomem efektu grawitacyjnego charakteryzowały się Czechy i Słowacja. W Czechach siła efektu grawitacyjnego w 2000 r. wynosiła 0,0211 mln USD²/mingeo² (155,8% średniej w UE-28), a w roku 2015 — 0,0458 mln USD²/mingeo² (171,5%), zaś na Słowacji — 0,0198 (146,%) w 2000 r. i 0,0450 mln USD²/mingeo² (168,7%) w 2015 r. Na Węgrzech i w Polsce notowano niższe wartości, odpowiednio: 0,0128 mln USD²/mingeo² (94,4%) w 2000 r. i 0,0323 mln USD²/mingeo² (120,9%) w 2015 r. oraz 0,0073 mln USD²/mingeo² (54,3%) w 2000 r. i 0,0233 mln USD²/mingeo² (87,3%) w 2015 r.

KALIBRACJA PARAMETRÓW MODELU

Dokonano kalibracji parametrów funkcji wydajności pracy (w czasie dyskretnym):

$$y_{it} = a g_{it}^{\beta} k_{it}^{\alpha} \quad (11)$$

gdzie:

y_{it} — wydajność pracy,
 k_{it} — kapitał na pracującego,
 g_{it} — łączne efekty grawitacyjne (w kraju i -tym UE w roku t),
 $a > 0, \alpha, \beta \in (0,1)$ — parametry funkcji (11).

Przeprowadzono ją w dwóch etapach. W pierwszym skalibrowano wartość parametru β , w drugim — wartość parametru α . Wynikało to stąd, że zmienne y_{it} i g_{it} są dość silnie współliniowe (współczynnik korelacji wyniósł 0,517).

Estymując metodą najmniejszych kwadratów (MNK) parametry równania $\ln y_{it} = b + \beta \ln g_{it}$, uzyskano oszacowania¹⁰:

$$\ln y_{it} = 4,940 + 0,197 \ln g_{it}$$

(65,263) (10,761)

$R^2 = 0,206$, skor. $R^2 = 0,204$, liczba obserwacji 448

$$\ln y_{it} - 0,1 \ln g_{it} = \ln \alpha + \alpha \ln k_{it} \quad (12)$$

Parametry równania oszacowane za pomocą MNK przedstawiają się następująco:

$$\ln y_{it} - 0,1 \ln g_{it} = 1,747 + 0,603 \ln k_{it}$$

(19,311) (31,053)

$R^2 = 0,684$, skor. $R^2 = 0,683$, liczba obserwacji 448

Ostatecznie parametry funkcji wydajności pracy skalibrowano następująco:

$$a = e^{1,747} \approx 5,737 \quad \alpha = 0,603 \quad \beta = 0,1$$

Ponieważ efekty indywidualne (*fixed effect*) objaśniały $\ln g_{it}$ w 76,1%, zaś $\ln k_{it}$ w 69,2%, pominięto je przy kalibracji parametrów funkcji wydajności pracy (11).

¹⁰ W nawiasach pod estymatorami podano odpowiednie wartości statystyki t -Studenta. R^2 (skor. R^2) oznacza współczynnik determinacji (skorygowany współczynnik determinacji).

**SYMULACJE ŚCIEŻEK WZROSTU WYDAJNOŚCI PRACY
W KRAJACH UE DO 2050 R.**

Układ równań różniczkowych (4), po skalibrowaniu wartości parametrów a, α i β , można zapisać w czasie dyskretnym następująco:

$$\left. \begin{aligned} y_{it} &= 5,737g_{it}^{0,1}k_{it}^{0,603} \\ \forall j, m \in G \wedge m \neq j \quad g_{jmt} &= \frac{k_{jt}k_{mt}}{d_{jm}^2} \\ \forall j \in G \quad g_{ji} &= \sqrt[27]{\prod_{m, j \in G \wedge m \neq j} g_{jmt}} \\ \forall j \in G \quad \Delta k_{jt} &= s_j y_{jt-1} - \mu_j k_{jt-1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Dla uproszczenia przyjęto, że $\forall j \in G \mu_j = 0,07$ (przyjęto jednolitą 7-procentową stopę ubytku kapitału na pracującego). Przyjęto sześć wariantów symulacyjnych w odniesieniu do stopy inwestycji. Założono, że w latach 2016—2050 będzie się ona kształtować tak, jak średnia stopa inwestycji dla:

- 1) poszczególnych krajów UE w latach 2000—2015,
- 2) całej gospodarki UE w latach 2000—2015,
- 3) poszczególnych krajów UE w latach 2000—2008,
- 4) całej gospodarki UE w latach 2000—2008,
- 5) poszczególnych krajów UE w latach 2009—2015,
- 6) całej gospodarki UE z lat 2009—2015.

Przyjęcie tych założeń pozwoliło na dokonanie w Excelu symulacji numerycznych ścieżek czasowych wydajności pracy, inwestycji na pracującego, kapitału na pracującego i efektu grawitacyjnego w krajach UE w latach 2016—2050.

W tablicy zestawiono symulacje wydajności pracy w wyróżnionych wariantach.

**SYMULACJE WYDAJNOŚCI PRACY W KRAJACH UE I JEJ ZMIAN MIĘDZY 2015 R. A 2050 R.^a
W RÓŻNYCH WARIANTACH DOTYCZĄCYCH STOPY INWESTYCJI (ceny stałe z 2015 r.)**

Kraje	Wydajność pracy						
	w 2015 r.	w 2050 r. w wariantach					
		1	2	3	4	5	6
tys. USD							
Austria	81,6	315,3 (386,3)	256,2 (313,9)	338,1 (414,2)	275,3 (337,3)	287,4 (352,1)	233,1 (285,5)
Belgia	92,7	255,9 (276,1)	224,6 (242,2)	261,1 (281,6)	240,9 (259,8)	249,1 (268,6)	204,8 (220,9)
Bułgaria	39,1	203,9 (521,3)	175,9 (449,9)	211,9 (541,8)	189,5 (484,7)	193,7 (495,2)	159,5 (407,9)
Chorwacja	51,1	248,4 (485,7)	223,8 (437,6)	262,7 (513,6)	241,0 (471,2)	230,7 (451,1)	203,0 (397,0)
Cypr	66,5	137,0 (206,1)	143,1 (215,4)	161,4 (242,8)	153,5 (231,0)	109,3 (164,5)	130,6 (196,5)

^a Wielkości podane w nawiasach; 2015=100.

**SYMULACJE WYDAJNOŚCI PRACY W KRAJACH UE I JEJ ZMIAN MIĘDZY 2015 R. A 2050 R.^a
W RÓŻNYCH WARIANTACH DOTYCZĄCYCH STOPY INWESTYCJI (dok.)**

Kraje	Wydajność pracy						
	w 2015 r.	w 2050 r. w wariancie					
		1	2	3	4	5	6
tys. USD							
Czechy	57,6	369,2 (640,5)	234,3 (406,4)	390,1 (676,7)	252,0 (467,2)	343,2 (595,3)	212,9 (369,3)
Dania	78,9	194,9 (246,9)	209,6 (265,6)	208,6 (264,3)	225,3 (285,4)	178,0 (225,6)	190,7 (241,7)
Estonia	55,9	278,1 (497,9)	188,8 (338,0)	303,1 (542,5)	202,8 (363,1)	248,1 (444,0)	171,9 (307,7)
Finlandia	76,6	221,9 (289,7)	193,2 (252,3)	237,7 (310,3)	207,3 (270,7)	202,6 (264,6)	176,2 (231,0)
Francja	82,4	232,2 (281,7)	206,1 (250,0)	241,7 (293,2)	221,1 (268,2)	220,2 (267,1)	187,9 (227,9)
Grecja	64,3	149,6 (232,8)	173,3 (269,7)	196,1 (305,2)	186,2 (289,8)	100,8 (156,9)	157,8 (245,5)
Hiszpania	75,6	224,5 (296,9)	167,7 (221,8)	268,6 (355,4)	179,6 (237,6)	174,9 (231,4)	153,2 (202,6)
Holandia	83,2	216,8 (260,6)	211,1 (253,7)	235,7 (283,3)	226,6 (272,4)	193,9 (233,1)	192,2 (231,0)
Irlandia	92,0	190,9 (207,4)	166,5 (180,9)	223,0 (242,3)	178,3 (193,7)	154,2 (167,5)	152,2 (165,4)
Litwa	58,5	165,9 (283,4)	182,6 (311,9)	180,5 (308,4)	196,5 (335,7)	148,3 (253,3)	165,8 (283,3)
Luksemburg	119,0	210,2 (176,7)	230,0 (193,3)	209,2 (175,8)	246,7 (207,4)	211,0 (177,3)	209,8 (176,4)
Łotwa	56,1	251,1 (448,0)	193,3 (344,8)	280,3 (500,1)	207,8 (370,6)	216,5 (386,3)	175,8 (313,6)
Malta	75,6	153,1 (202,4)	170,6 (225,5)	162,2 (214,5)	183,3 (242,3)	141,7 (187,3)	155,2 (205,2)
Niemcy	74,8	211,2 (282,5)	222,8 (297,9)	218,0 (291,6)	239,6 (320,4)	202,5 (270,8)	202,4 (270,7)
Polska	56,2	185,6 (330,1)	198,8 (353,5)	177,6 (315,9)	214,1 (380,8)	195,5 (347,7)	180,3 (320,6)
Portugalia	54,9	134,9 (245,9)	132,0 (240,6)	165,8 (302,2)	141,7 (258,3)	101,0 (184,1)	120,2 (219,1)
Rumunia	49,5	247,3 (500,0)	182,2 (368,5)	245,2 (495,9)	195,9 (396,1)	249,3 (504,1)	165,7 (335,1)
Słowacja	59,5	307,1 (516,0)	234,4 (393,9)	350,7 (589,3)	252,4 (424,2)	256,4 (431,0)	212,6 (357,4)
Słowenia	64,4	297,5 (462,2)	231,8 (360,0)	364,6 (566,4)	249,3 (387,2)	223,6 (347,3)	210,6 (327,1)
Szwecja	86,4	237,2 (274,6)	204,2 (236,4)	238,8 (276,5)	219,0 (253,5)	234,6 (271,7)	186,2 (215,6)
Węgry	53,6	241,0 (449,2)	215,8 (402,4)	260,8 (486,2)	232,5 (433,4)	216,9 (404,3)	195,7 (364,9)
Wielka Brytania	87,2	135,0 (154,8)	180,6 (207,2)	146,6 (168,1)	194,0 (222,5)	120,9 (138,7)	164,4 (188,6)
Włochy	73,3	197,2 (269,2)	205,1 (279,9)	222,0 (303,0)	220,3 (300,8)	168,1 (229,5)	186,6 (254,7)
Współczynnik zmienności wy- dajności pracy	0,244	0,261	0,147	0,261	0,148	0,285	0,146

^a Wielkości podane w nawiasach; 2015=100.

Źródło: jak przy wykr. 1.

Wyniki symulacji (tablica) pozwalają na wyprowadzenie następujących wniosków:

- przy założeniu utrzymania średniej krajowej stopy inwestycji z okresu 2000—2015 w perspektywie 2050 r. (wariant 1) największej wydajności pracy

w 2050 r. można się spodziewać w Czechach — 369,2 tys. USD, w drugiej kolejności w Austrii — 315,3 tys. USD, a następnie na Słowacji — 307,1 tys. USD. W Portugalii (w 2015 r. wydajność pracy 54,9 tys. USD) zmienna ta może w 2050 r. wynosić blisko 135 tys. USD, najmniej wśród analizowanych krajów; podobnie w Wielkiej Brytanii (135 tys. USD) oraz na Cyprze (137 tys. USD). Polska w 2015 r. plasowała się na 21 pozycji w rankingu wydajności pracy (56,2 tys. USD). Jeśli utrzyma dotychczasową średnią stopę inwestycji, to w 2050 r. będzie się znajdować na podobnej pozycji (22), z wydajnością pracy 185,6 tys. USD;

- w wariantcie 1 największy przyrost wydajności pracy w 2050 r. zostanie uzyskany w gospodarce czeskiej — 640,5 wartości referencyjnej roku 2015 (2015=100). Równie dużej zmiany należy się spodziewać w przypadku Bułgarii (521,3), Słowacji (516,0) i Rumunii (500,0). Polska ma szansę znaleźć się na 11 pozycji rankingu zmian wartości wydajności pracy między 2015 r. a 2050 r. (330,1);
- przy uwzględnieniu średniej stopy inwestycji dla całej gospodarki UE z okresu 2000—2015 dla lat 2016—2050 (wariant 2) największej wydajności pracy w 2050 r. można się spodziewać w Austrii (256,2 tys. USD); na Słowacji i w Czechach może ona wynosić odpowiednio: 234,4 tys. USD i 234,3 tys. USD. Bardzo blisko sytuują się Słowenia (231,8 tys. USD) i Luksemburg (230,0 tys. USD). Najmniejszą wydajność, niemal identyczną jak w wariantcie stopy krajowej, może uzyskać Portugalia (54,9 tys. USD w 2015 r., 132 tys. USD w 2050 r.). Polska, zajmująca w 2015 r. 21 miejsce w rankingu wydajności pracy (56,2 tys. USD), w 2050 r. awansuje na 15 pozycję (198,8 tys. USD);
- w wariantcie 2 największy przyrost wydajności pracy w roku 2050 nastąpi w Bułgarii, Chorwacji, Czechach i na Węgrzech (odpowiednio: 449,9; 437,6; 406,4 oraz 402,4 wartości referencyjnej 2015 r.). Tylko w przypadku Irlandii (180,9) oraz Luksemburga (193,3) zmiany te wynoszą poniżej dwukrotności poziomu referencyjnego. Polska ma szansę znaleźć się na 8 pozycji w rankingu (353,5);
- przy założeniu utrzymania średniej krajowej stopy inwestycji z okresu 2000—2008 w perspektywie 2016—2050 (wariant 3) największej wydajności pracy w 2050 r. można spodziewać się w Czechach (390,1 tys. USD), a następnie w Słowenii (364,6 tys. USD) i na Słowacji (350,7 tys. USD). Najmniejszą uzyska Wielka Brytania (87,2 tys. USD w 2015 r. i 146 tys. USD w 2050 r.). Na zbliżonym poziomie będą sytuować się: Cypr (161,4 tys. USD), Malta (162,2 tys. USD) i Portugalia (165,8 tys. USD). Polska zajmie 24 miejsce (177,6 tys. USD);
- w wariantcie 3 w roku 2050 nastąpi w gospodarce czeskiej (676,7 wartości referencyjnej 2015 r.). Dużej zmiany należy spodziewać się również na Słowacji (589,3), w Słowenii (566,4), Estonii i Bułgarii (ok. 542). Polska ma szansę znaleźć się na 12 pozycji w rankingu (315,9);

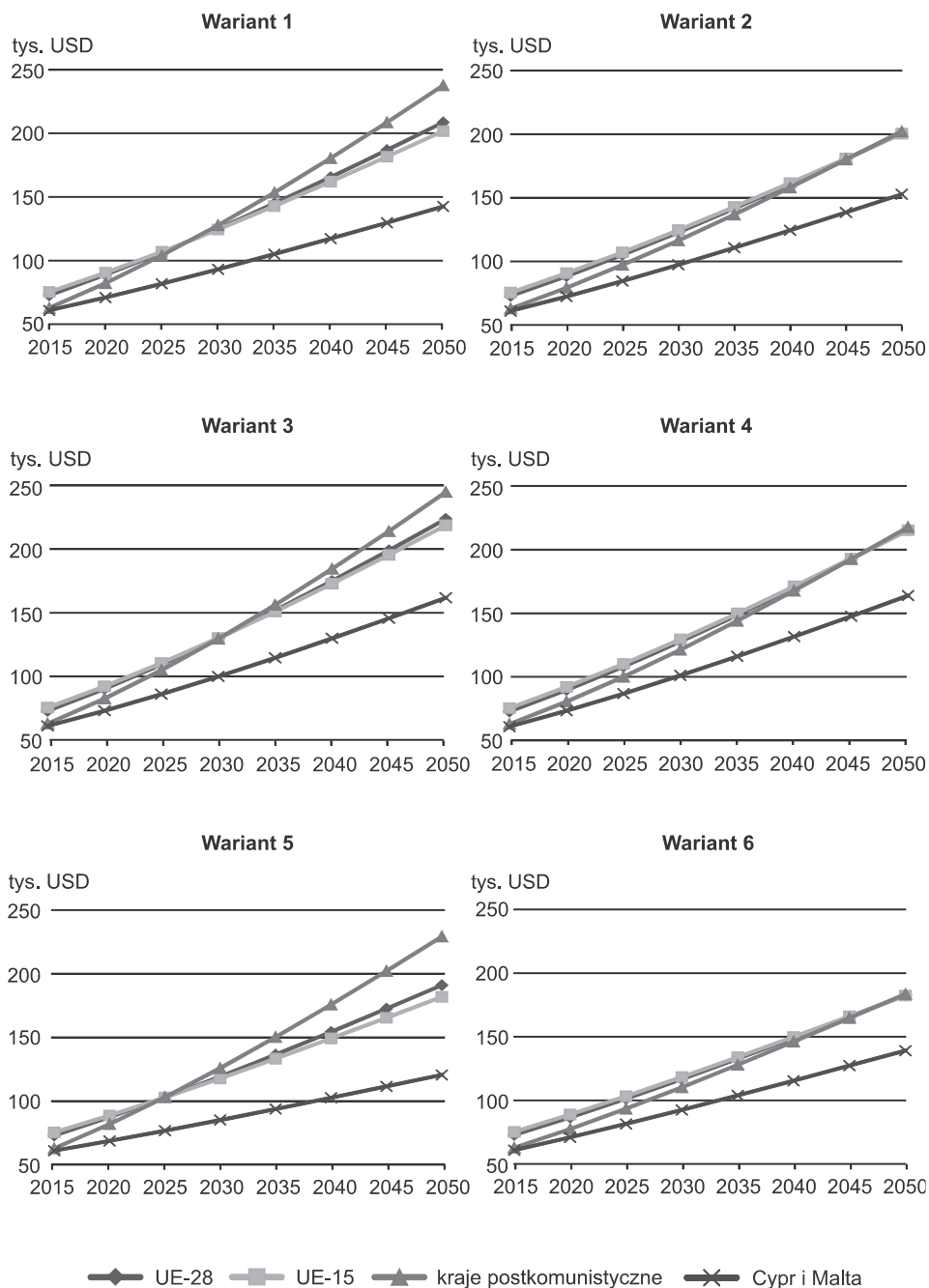
- przy uwzględnieniu średniej stopy inwestycji dla całej gospodarki UE z okresu 2000—2008 dla okresu 2016—2050 (wariant 4) największej wydajności pracy w 2050 r. można się spodziewać w Austrii (275,3 tys. USD), a następnie na Słowacji i w Czechach (ok. 252 tys. USD) oraz Słowenii (249,3 tys. USD). Portugalia (141,7 tys. USD) i Cypr (153,5 tys. USD) w tym scenariuszu, tak jak w poprzednich, sytuują się na końcu rankingu. Polska, tak jak w przypadku średniej stopy inwestycji dla całej gospodarki UE z okresu 2000—2015, zajmie 15 lokatę (214,1 tys. USD);
- w wariantcie 4 największy przyrost wydajności pracy w roku 2050 uzyskają Bułgaria, Chorwacja, Czechy i Węgry (odpowiednio: 484,7, 471,2, 437,2 i 433,4 wartości referencyjnej roku 2015). Poniżej dwukrotności poziomu referencyjnego znajdzie się tylko Irlandia (193,7). Polska ma szansę uplasować się na 8 pozycji w rankingu (380,8);
- przy założeniu utrzymania średniej krajowej stopy inwestycji z okresu 2009—2015 w perspektywie 2016—2050 (wariant 5) największej wydajności pracy w 2050 r. można się spodziewać w Czechach (343,2 tys. USD), w drugiej kolejności — w Austrii (287,4 tys. USD), a następnie na Słowacji (256,4 tys. USD), najmniejszej zaś — w Grecji (64,3 tys. USD w 2015 r., 101 tys. USD w 2050 r.) i Portugalii (101 tys. USD w 2050 r.). Polska, w 2015 r. zajmująca 21 pozycję w rankingu (56,2 tys. USD), ma szansę awansować na 16 pozycję, z wydajnością pracy 195,5 tys. USD;
- w wariantcie 5 największy przyrost wydajności pracy w roku 2050 nastąpi w gospodarce czeskiej (595,3 wartości referencyjnej roku 2015), a najmniejszy — w Wielkiej Brytanii (138,7). Polska ma szansę znaleźć się na 10 pozycji w rankingu (z wartością zmiany 347,7);
- przy uwzględnieniu średniej stopy inwestycji dla całej gospodarki UE z okresu 2009—2015 dla okresu 2016—2050 (wariant 6) największą wydajność pracy w 2050 r. uzyska Austria (233,1 tys. USD), a następnie Słowacja i Czechy (po ok. 212 tys. USD) oraz Słowenia i Luksemburg (po 210,8 tys. USD). Najmniejszej wydajności pracy wśród analizowanych krajów można się spodziewać (jak we wcześniejszych wariantach) w Portugalii (120,2 tys. USD). Polska w 2050 r. ma szansę na 15 miejsce (180,3 tys. USD), podobnie jak w wariantach 2 i 4;
- w wariantcie 6 największy przyrost wydajności pracy w roku 2050 nastąpi w Bułgarii, Chorwacji, Czechach i na Węgrzech (odpowiednio: 407,9; 397,0; 369,3 i 364,9 wartości referencyjnej roku 2015). W przypadku Irlandii (165,4), Luksemburga (176,4), Wielkiej Brytanii (188,6) oraz Cypru (196,5) zmiany te nie przekroczą dwukrotności poziomu referencyjnego. Polska ma szansę znaleźć się na 8 pozycji w rankingu (z wartością zmiany 320,6);
- współczynnik zmienności wydajności pracy w wariantach 1, 3 i 5 kształtowania się stóp inwestycji wzrósłby z 24,4% w 2015 r. do 26,1—28,5% w 2050 r. Oznacza to, że pomiędzy krajami UE występowałby proces σ — dywergencji

wydajności pracy; najsilniejszy byłby przy utrzymaniu się struktury stóp inwestycji na poziomie średniej dla poszczególnych krajów UE z okresu 2009—2015. Natomiast w wariantach 2, 4 i 6 współczynnik zmienności wydajności pracy w roku 2050 byłby niższy niż w roku 2015, co oznaczałoby występowanie procesu σ — konwergencji wydajności pracy pomiędzy gospodarkami UE. Uzupełnieniem powyższej analizy są wyniki symulacji wydajności pracy w grupach krajów (UE-28, UE-15, kraje postkomunistyczne, Cypr i Malta) w sześciu wariantach dotyczących stóp inwestycji (wykr. 4).

Wnioski te można sformułować następująco:

- przy założeniu utrzymania średniej krajowej stopy inwestycji z okresu 2000—2015 w perspektywie 2050 r. (wariant 1) najsilniejszą średnioroczną dynamikę zmian wydajności pracy obserwuje się w krajach postkomunistycznych UE (3,88%), co wskazuje na wyraźny wzrost poziomu wydajności pracy w tej grupie krajów w stosunku do UE-28 i UE-15 już w roku 2040 (w kolejnej dekadzie różnica na korzyść krajów postkomunistycznych się zwiększa);
- przyjęcie dla okresu 2016—2050 średniej stopy inwestycji dla całej gospodarki UE z lat 2000—2015 (wariant 2) skłania do przypuszczenia, że w 2050 r. wydajność pracy w trzech dużych grupach krajów będzie się kształtować na niemalże identycznym poziomie (kraje postkomunistyczne — 202,2 tys. USD, UE-28 — 200,7 tys. USD, UE-15 — 200,4 tys. USD);
- przy założeniu utrzymania średniej krajowej stopy inwestycji z okresu 2000—2008 w perspektywie 2050 r. (wariant 3) w krajach postkomunistycznych obserwuje się najsilniejszą średnioroczną dynamikę zmian wydajności pracy (3,96%), a zrównanie wydajności pracy w tej grupie z UE-28 i UE-15 nastąpi ok. 2035 r. W roku 2050 różnice w wydajności pracy pomiędzy krajami postkomunistycznymi a UE-28 i UE-15 nie będą tak wyraźne jak w wariantcie 1;
- przyjęcie dla okresu 2016—2050 średniej stopy inwestycji dla całej gospodarki UE z lat 2000—2008 (wariant 4) skłania do przypuszczenia, że w 2050 r. wydajność pracy w trzech dużych grupach krajów będzie na niemalże identycznym poziomie (kraje postkomunistyczne — 217,7 tys. USD, UE-28 — 215,6 tys. USD, UE-15 — 215,2 tys. USD);
- przy utrzymaniu średniej krajowej stopy inwestycji z okresu 2009—2015 w perspektywie 2050 r. (wariant 5) w krajach postkomunistycznych po raz kolejny obserwuje się najsilniejszą średnioroczną dynamikę zmian wydajności pracy (3,77%). Zrównanie wydajności pracy trzech dużych grup krajów UE nastąpi ok. 2025 r. Różnice w wydajności pracy pomiędzy grupą krajów postkomunistycznych a UE-28 i UE-15 w roku 2050 będą duże;
- utrzymanie dla okresu 2016—2050 średniej stopy inwestycji dla całej gospodarki UE z lat 2009—2015 (wariant 6) skłania do przypuszczenia, że w 2050 r. wydajność pracy w trzech dużych grupach krajów UE będzie na jednakowym poziomie (ok. 183 tys. USD).

**WYKR. 4. SYMULACJA WYDAJNOŚCI PRACY W GRUPACH KRAJÓW UE
(ceny stałe z 2015 r.)**



Źródło: jak przy wykr. 1.

Podsumowanie

Przedstawiona w artykule analiza przestrzennego zróżnicowania rozwoju ekonomicznego krajów UE w latach 2000—2015 oraz symulacje zmian wydajności pracy do roku 2050 przeprowadzone z wykorzystaniem grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego prowadzą do sformułowania następujących ogólnych wniosków.

1. W latach 2000—2015 wydajność pracy we wszystkich 28 krajach UE ogółem rosła w średniorocznym tempie 0,95%. Najszybciej następowało to w krajach postkomunistycznych, a najwolniej — w „starej” UE (0,58%). Kraje postkomunistyczne w analizowanym okresie znacznie zniwelowały dystans rozwojowy w stosunku do krajów UE-15.

2. Przy utrzymaniu dotychczasowych średnich krajowych stóp inwestycji w perspektywie 2050 r. największych zmian wydajności pracy można się spodziewać w przypadku: Czech, Bułgarii, Słowacji, Słowenii, Estonii i Rumunii. Polska ma szansę znaleźć się na 10—12 pozycji w rankingu przyszłych zmian wartości wydajności pracy. Przy założeniu zmiany dotychczasowej średniej krajowej stopy inwestycji na średnią stopę inwestycji dla gospodarki całej UE Polska ma szansę awansować na 8 pozycję w rankingu zmian wartości wydajności pracy między 2015 a 2050 r.

3. Przyjęcie dla okresu 2016—2050 dotychczasowej średniej stopy inwestycji dla całej gospodarki UE skłania do przypuszczenia, że w 2050 r. wydajność pracy w trzech dużych grupach krajów objętych analizą będzie się kształtować na bardzo podobnym poziomie.

dr Rafał Wiśła, dr Katarzyna Filipowicz, prof. dr hab. Tomasz Tokarski — *Uniwersytet Jagielloński*

LITERATURA

- Filipowicz, K., Tokarski, T. (2016a). Podstawowe modele wzrostu gospodarczego w teorii ekonomii. W: A. Nowosad., R. Wiśła (red.), *Zróżnicowanie rozwoju współczesnej Europy*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
- Filipowicz, K., Tokarski, T. (2016b). Zróżnicowanie wydajności pracy w Europie — na podstawie grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego. W: A. Nowosad., R. Wiśła (red.), *Zróżnicowanie rozwoju współczesnej Europy*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
- Lucas, R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22.
- Malaga, K., Kliber, P. (2007). *Konwergencja i nierówności regionalne w Polsce w świetle neoklasycznych modeli wzrostu*. Poznań: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.
- Mankiw, N. G., Romer, D., Weil, D. N. (1992). A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*.
- Mroczek, K., Tokarski, T., Trojak, M. (2014). Grawitacyjny model zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw. *Gospodarka Narodowa*, (3).

- Nowosad, A., Wisła, R. (red.). (2016). *Zróżnicowanie rozwoju współczesnej Europy*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
- Roszkowska, S. (2013). *Kapitał ludzki a wzrost gospodarczy*. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.
- Solow, R. M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*.
- Tokarski, T. (2009). *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujęcie neoklasyczne)*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
- Tokarski, T. (2011). *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
- Żółtowska, E. (1997). *Funkcja produkcji. Teoria, estymacje, zastosowania*. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Summary. *The aim of the article is to present the differentiation of economic development of the European Union countries in the years 2000—2015 and to simulate changes in labour productivity in the perspective of 2050. Two macroeconomic aggregates describing dynamics of development processes, i.e. labour productivity and capital-labour ratio, connected with the so-called gravity effects were used in the research. It was based on data from the United Nations Economic Commission for Europe (UNECE).*

The results lead to the formulation of two key conclusions. Firstly, assuming that the average investment rate from 2000—2015, 2000—2008 and 2009—2015 is maintained in the perspective until 2050, the strongest annual average dynamics of labour productivity changes is observed in the countries belonging to the post-communist group. Secondly, the adoption, for the 2016—2050 period, of the average investment rate for the entire EU economy for 2000—2015, 2000—2008 and 2009—2015, will lead to the assumption that in 2050 the productivity of large groups of analysed countries will be shaped at a very similar level.

Keywords: development diversification, gravity growth model, labour productivity.