

Wymiar fraktalny szeregów czasowych szacowany metodą podziału pola

Grzegorz Przekota^a 

Streszczenie. Jedną z ważniejszych kwestii do rozstrzygnięcia w analizie szeregów czasowych jest określenie ich zmienności oraz identyfikacja procesu kształtowania ich wartości. W ujęciu klasycznym zmienność najczęściej utożsamiana jest z wariancją stóp wzrostu. Tymczasem natura ryzyka to nie tylko zmienność, lecz także przewidywalność zmian, którą można ocenić przy użyciu wymiaru fraktalnego. Celem artykułu jest prezentacja zastosowania wymiaru fraktalnego szacowanego metodą podziału pola do oceny właściwości szeregów czasowych. W opracowaniu przedstawiono sposób wyznaczenia wymiaru fraktalnego, jego interpretację, tablice istotności oraz przykład zastosowania. Za pomocą wymiaru fraktalnego opisano właściwości szeregu czasowego wartości indeksu giełdowego WIG w latach 2014–2018 oraz szeregów czasowych stóp wzrostu największych polskich spółek giełdowych w latach 2015–2018. Zastosowana metoda umożliwia zakwalifikowanie szeregu czasowego do jednej z trzech klas, jako szereg: persystentny, błędzenia losowego bądź antypersystentny. Na szczególnych przypadkach pokazano różnice pomiędzy zastosowaniem odchylenia standardowego i wymiaru fraktalnego do oceny ryzyka. Wymiar fraktalny jawi się tu jako metoda pozwalająca na ocenę stopnia stabilności wahań.

Słowa kluczowe: wymiar fraktalny, metoda podziału pola, zmienność, błędzenie losowe

Fractal dimension of time series estimated by the surface division method

Summary. One of the most important issues to be settled in the analysis of time series is determining their variability and identifying the process of shaping their values. In the classical approach, volatility is most often identified with the variance of growth rates. However, risk can be characterised not only by the variability, but also by the predictability of the changes which can be evaluated using the fractal dimension. The aim of this paper is to present the applicability of the fractal dimension estimated by the surface division method to the assessment of the properties of time series. The paper presents a method for determining the fractal dimension, its interpretation, significance tables and an example of its application. Fractal dimension has been used here to describe the properties of the time series of the WIG stock exchange index in 2014–2018 and the time series of the growth rates of the largest listed Polish companies in 2015–2018. The applied method makes it possible to classify a time series into one of three classes of series: persistent, random or antipersistent. Specific cases show the differences between the use of standard deviation and fractal dimension for risk assessment. Fractal dimension appears here to be a method for assessing the degree of stability of variations.

Keywords: fractal dimension, surface division method, variability, random walk

JEL: C18, C22

^a Politechnika Koszalińska, Wydział Nauk Ekonomicznych.

Współczesne procesy gospodarcze nie dają się wyjaśnić za pomocą klasycznych metod statystyki czy podstawowych praw ekonomii. Na zjawiska takie, jak: występowanie cykli koniunkturalnych, sytuacja na rynku pracy, kształtowanie stopy procentowej czy cen na rynkach finansowych wpływa wiele zmiennych. Ich liczba oraz skomplikowane powiązania między nimi sprawiają, że proste modele analityczne okazują się w praktyce nieskuteczne. Większe możliwości daje modelowanie wielorównaniowe ze zmiennymi opóźnionymi, choć i ono bywa przedmiotem krytyki. Peters (1997) wskazuje, że prognozy z tradycyjnych modeli ekonometrycznych nie sprawdzają się w praktyce lub też sprawdzają się tylko w perspektywie krótkiego czasu. Ponadto niewielka zmiana warunków początkowych powoduje, że model przestaje funkcjonować poprawnie. Problemem jest także założenie równowagi systemu gospodarczego, nieprzystające do rzeczywistości go otaczającej, która ewoluuje, powodując także zmiany samego systemu. Charakterystyczny dla systemu gospodarczego będzie zatem raczej stan nierównowagi niż równowagi.

Rozwój nowych dyscyplin naukowych, takich jak teoria chaosu i analiza fraktalna, daje szersze możliwości opisywania otaczającej rzeczywistości. Do modelowania zjawisk ekonomicznych można wykorzystać szereg stosunkowo prostych systemów chaosu deterministycznego: równanie logistyczne, atraktor Henona, będący dwuwymiarowym odpowiednikiem równania logistycznego (Mosdorf, 1997), czy też model Lorenza (Zawadzki, 1996), znany jako efekt motyla. Popularnym narzędziem wywodzącym się z geometrii fraktalnej jest także wymiar fraktalny.

Jeżeli system jest nieliniowym systemem dynamicznym, to charakteryzują go występowanie długoterminowych korelacji i trendów, nieoczekiwane zachowanie w pewnych warunkach i pewnych okresach oraz struktura, której części (zarówno odcinki większe, jak i coraz mniejsze) są podobne do całości i mają te same charakterystyki statystyczne. Taką strukturę określa się jako fraktalną (Siemiński, 2001).

Celem artykułu jest prezentacja zastosowania wymiaru fraktalnego szacowanego metodą podziału pola do oceny zmienności szeregów czasowych. W opracowaniu zwrócono uwagę na interpretację uzyskiwanych wartości oraz przedstawiono tabelę istotności. Pokazano różnice w postrzeganiu ryzyka rozumianego jako zmienność i mierzonego odchyleniem standardowym oraz ryzyka rozumianego jako stabilność wahań i mierzonego wymiarem fraktalnym. Praktyczne zastosowanie i ograniczenia metody omówiono na przykładzie szeregów czasowych poziomów i zmian wartości indeksu giełdowego WIG oraz notowań największych polskich spółek giełdowych. Zakres czasowy badania to cztery lata, od października 2014 r. do października 2018 r. Alternatywnie dokonano porównania uzyskanych wyników z wynikami testu stacjonarności ADF.

WYMIAR FRAKTALNY SZEREGÓW CZASOWYCH

W klasycznej teorii inwestycji finansowych jedną z najpopularniejszych miar określających ryzyko jest wariancja stóp zwrotu. Uważa się, że ryzyko jest tym większe, im większa zmienność stóp zwrotu. Jednak w badaniu ryzyka systemów o charakterze losowym odpowiednią miarę stanowi wariancja. Interesujących rozwiązań w zakresie szacowania ryzyka dostarcza geometria fraktalna. Jedną z miar wywodzących się z geometrii fraktalnej jest wymiar fraktalny szeregów czasowych, który może być uzupełnieniem klasycznych miar zmienności. Chociaż w literaturze przedmiotu bardzo często wymiar fraktalny traktuje się jako miarę ryzyka w rozumieniu zmienności (Zeug-Żebro, 2015), to jego natura jest inna. Problem ten poruszono w niniejszej pracy, porównując wartości wymiaru fraktalnego oraz odchylenia standardowego dla pewnych szczególnych przypadków.

Mandelbrot (1982) podaje przykład zastosowania wymiaru fraktalnego do analizy zjawisk naturalnych. Problem dotyczy pomiaru długości linii brzegowej. Wynik zależy od długości miarki użytej do pomiaru: im miarka jest krótsza, tym wynik dokładniejszy, gdyż pozwala na uchwycenie większej liczby krzywizn. Wymiar fraktalny daje odpowiedź na pytanie, jak postrzępione są linie brzegowe (im bardziej, tym wymiar ten jest większy). Przykładowo wymiar fraktalny linii brzegowej Norwegii wynosi 1,52, a linii brzegowej Wielkiej Brytanii – 1,26. Wynik ten jest zgodny ze spostrzeżeniami poczynionymi na podstawie mapy, ponieważ linia brzegowa Norwegii jest bardziej postrzępiona od linii brzegowej Wielkiej Brytanii, a więc jej wymiar fraktalny jest większy i bardziej zbliżony do 2.

Współcześnie wymiar fraktalny stosuje się do opisu wielu zjawisk naturalnych (Cervantes-De la Torre, González-Trejo, Real-Ramírez i Hoyos-Reyes, 2013), zagospodarowania przestrzennego (Chen, 2013; Guoqiang, 2002), problemów medycznych (Gómez, Mediavilla, Hornero, Abásolo i Fernández, 2009; Harne, 2014) czy ekonomicznych (Bhatt, Dedania i Shah, 2015; Kapecka, 2013). Rozwijana jest także metodologia szacowania wymiaru fraktalnego (Sy-Sang i Feng-Yuan, 2009).

W polskiej literaturze przedmiotu ostatnich lat wiele uwagi wymiarowi fraktalnemu poświęcił Buła (2017). Porównywał on m.in. wyniki otrzymane za pomocą prezentowanej w tym opracowaniu metody podziału pola oraz za pomocą innych metod. Okazało się, że podział pola daje niższe wartości niż inne metody. Nie stanowi to jednak problemu, ponieważ kluczową kwestią jest nie wartość, lecz rozstrzygnięcie, czy dany proces jest procesem błędzenia losowego, czy też innym.

Niniejsza praca porusza problem testowania hipotezy błędzenia losowego przy użyciu metody podziału pola. Szacowanie wymiaru fraktalnego dla ekonomicznych szeregów czasowych wymaga odejścia od klasycznej geometrii euklidesowej, podającej wymiar przestrzeni, w której umieszczony jest wykres szeregu czasowego. Przestrzeń tę stanowi płaszczyzna o wymiarze euklidesowym 2.

Rozpatrując natomiast trajektorię szeregu czasowego jako łamaną, otrzymujemy wymiar euklidesowy 1. Tymczasem wykres szeregu czasowego nie wypełnia całej płaszczyzny, na której został umieszczony, zatem jego wymiar będzie mniejszy od 2 (wymiaru euklidesowego płaszczyzny) i większy od 1, ponieważ jest to wymiar euklidesowy linii prostej, a szeregi czasowe na ogół mają inny kształt.

Wymiar fraktalny jako wymiar ułamkowy pozwala charakteryzować kształt wykresu szeregu czasowego. Opisuje, w jaki sposób szereg czasowy wypełnia swoją przestrzeń i jest wynikiem wszystkich czynników wpływających na system, z którego pochodzi szereg czasowy (Peters, 1997). Efektem oddziaływania różnych czynników może być obraz szeregów czasowych zmiennych ekonomicznych, który będzie klasyfikował je do jednej z trzech klas różniących się wartościami wymiaru fraktalnego (Halley i Kunin, 1999):

1. Szeregi persystentne (czarny szum) – w których obecne jest zjawisko wzmacniania trendu. Oznacza to (w przeciwieństwie do szeregów antypersystentnych), że jeżeli wartość szeregu wzrosła (lub spadła) w porównaniu z wartością poprzednią, to w następnym momencie bardziej prawdopodobny będzie jej wzrost (lub spadek). Szeregi takie będą miały wymiar fraktalny bliższy 1;
2. Szeregi czasowe błędzenia losowego (biały szum) – w których poprzednia zmiana wartości nie ma wpływu na przyszłe zmiany. Zdarzenia wpływające na wartości szeregu są przypadkowe i nieskorelowane ze sobą, stąd też szeregi takie są nieprzewidywalne;
3. Szeregi antypersystentne (różowy szum) – w których występuje zjawisko powracania wartości obserwacji do poziomu średniego. Oznacza to, że jeśli wartość szeregu odchyli się w górę (lub w dół) od średniej, to w następnym momencie bardziej prawdopodobne jest odchylenie w przeciwnym kierunku. Szeregi takie będą miały wymiar fraktalny bliższy 2.

Wymiar fraktalny dla wykresów jednowymiarowych szeregów czasowych przyjmuje wartości z przedziału $[1, 2]$: 1 – gdy wykres przybierze kształt linii prostej, 2 – gdy wypełni pewien obszar dwuwymiarowy na płaszczyźnie. W praktyce wartości skrajne nie są osiągalne.

Skoro wymiar fraktalny ma opisywać, jak szereg czasowy wypełnia obszar, lub inaczej – jak zagęszcza się na płaszczyźnie, to większe zagęszczenie będzie powodować zwiększenie wymiaru fraktalnego. Oznacza to, że częste zmiany szeregów czasowych w różnych kierunkach powodują zwiększenie wymiaru fraktalnego i większe wypełnienie płaszczyzny. Występuje tu zjawisko powrotu do średniej. Szeregi jednokierunkowe, z małą liczbą zmian, mają mniejszy wymiar fraktalny, ich kształty zaś są bardziej zbliżone do kształtu prostej. Takie szeregi charakteryzuje zjawisko podtrzymania trendu.

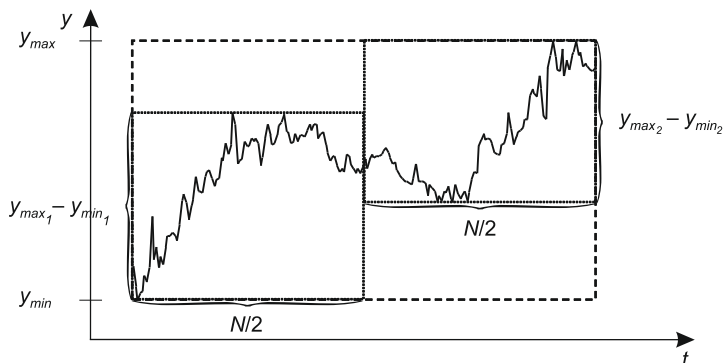
Do oszacowania wymiaru fraktalnego ekonomicznych szeregów czasowych można wykorzystać metodę pudełkową BCM, w której zamiast kół zlicza się kwadraty o boku określonej długości, potrzebne do pokrycia wykresu szeregu

czasowego. Inną popularną metodą szacowania wymiaru fraktalnego jest metoda wariacyjna VM (Dubuc, Quiniou, Roques-Carmes, Tricot i Zucker, 1989), podobnie jak metoda segmentowo-wariacyjna SVM (Zwolankowska, 2001). Często stosuje się także analizę przeskalowanego zakresu autorstwa Hursta (Hurst, 1951; Kale i Butar Butar, 2011).

METODA PODZIAŁU POLA

Metoda szacowania wymiaru fraktalnego przedstawiona w opracowaniu łączy w sobie elementy metody segmentowo-wariacyjnej oraz tradycyjnych metod geometrycznych (Przekota i Przekota, 2004). Podobnie jak w metodzie segmentowo-wariacyjnej wykres szeregu czasowego pokrywany jest przez prostokąty. Samo szacowanie wymiaru fraktalnego odbywa się natomiast poprzez szacowanie współczynnika regresji, tak jak w metodach geometrycznych. W kolejnych punktach wyprowadzono wzór wymiaru *MPP* (metoda podziału pola) oraz pokazano jego zastosowania praktyczne.

WYKR. 1. SZEREG CZASOWY NA PŁASZCZYŹNIE



Źródło: opracowanie własne.

Niech szereg czasowy (wykr. 1) ma długość N . Wtedy pole obszaru zajmowanego przez szereg można definiować jako:

$$P = N \cdot (y_{max} - y_{min}) \quad (1)$$

gdzie:

y_{max} – największa wartość w szeregu,

y_{min} – najmniejsza wartość w szeregu.

Po podziale szeregu na połowy pole wyrażać będzie się wzorem:

$$p = \frac{N}{2} \cdot (y_{max_1} - y_{min_1}) + \frac{N}{2} \cdot (y_{max_2} - y_{min_2}) \quad (2)$$

Pomiędzy p a P zachodzi nierówność:

$$p \leq P \quad (3)$$

Przy powtarzaniu czynności przepoławiania kolejnych fragmentów szeregu za każdym razem okazuje się, że suma pól po podziale nie jest większa od sumy pól pierwotnych. Oznacza to, że przy dowolnym podziale pierwotnym na k części pole zajmowane przez wykres szeregu będzie wynosić:

$$P_k = \frac{N}{k} \sum_{i=1}^k (y_{max_i} - y_{min_i}) \quad (4)$$

a przy podziale na $2k$ części:

$$P_{2k} = \frac{N}{2k} \sum_{i=1}^{2k} (y_{max_i} - y_{min_i}) \quad (5)$$

Pomiędzy P_k i P_{2k} zachodzi nierówność:

$$P_{2k} \leq P_k \quad (6)$$

co można także zapisać jako:

$$P_{2k} \leq 2 \cdot \frac{P_k}{2} \quad (7)$$

Dla dowolnego szeregu natomiast zachodzi:

$$P_{2k} = MPP_k \cdot \frac{P_k}{2} \quad (8)$$

MPP_k zawiera się w przedziale $[1, 2]$ i będzie tym większe, im kształt trajektorii szeregu czasowego będzie bardziej postrzępiony, czyli im częściej w szeregu wystąpi zmiana trendu na przeciwny. Natomiast im bardziej kształt szeregu zbliży się do prostej, czyli im mniej zmian trendu na przeciwny wystąpi w szeregu, tym bardziej wartość MPP_k będzie bliższa 1.

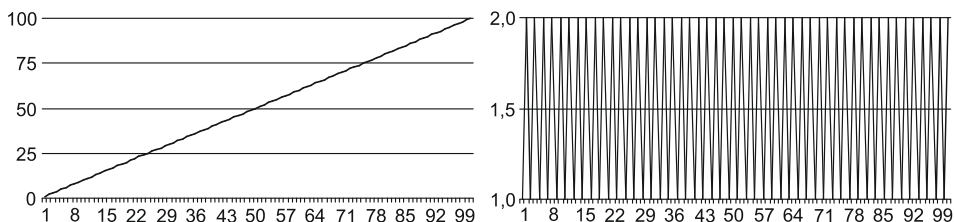
Jeśli w układzie współrzędnych na osi x będą odkładać się wartości $\frac{P_k}{2}$, a na osi y wartości P_{2k} , to wartość MPP_k będzie współczynnikiem regresji liniowej y względem x bez wyrazu wolnego, gdzie wartości P_{2k} odgrywają rolę zmiennej objaśnianej, a wartości $\frac{P_k}{2}$ – zmiennej objaśniającej. Stąd:

$$MPP_k = \frac{\sum_k P_{2k} \frac{P_k}{2}}{\sum_k \left(\frac{P_k}{2}\right)^2} \quad (9)$$

gdzie k – liczba dokonanych podziałów.

Tak zdefiniowana wartość MPP_k może być traktowana jako miara postrzępienia szeregów, czyli jako wymiar fraktalny szeregów. W praktycznym zastosowaniu dla danych z rynków finansowych na podstawie wartości wymiaru fraktalnego można wnioskować o ryzyku inwestycyjnym.

WYKR. 2. SKRAJNE PRZYPADKI WYMIARU FRAKTALNEGO MPP



Źródło: opracowanie własne.

Dwa skrajne przypadki wymiaru fraktalnego MPP pokazano na wyk. 2. Pierwszy to linia prosta (tutaj jest to funkcja $y = x$). Pole po podziale zawsze stanowi połowę pola pierwotnego, a zatem:

$$P_{2k} = 1 \cdot \frac{P_k}{2} \quad (10)$$

czyli wymiar fraktalny jest tutaj równy 1 i jest zgodny z wymiarem euklidesowym prostej.

Drugi przypadek to sytuacja, w której wartości szeregu na przemian rosną i maleją (tutaj jest to 2 dla x parzystych i 1 dla x nieparzystych). Pole po podziale zawsze jest równe polu pierwotnemu, zatem:

$$P_{2k} = 2 \cdot \frac{P_k}{2} \quad (11)$$

czyli wymiar fraktalny jest tutaj równy 2 i jest zgodny z wymiarem euklidesowym płaszczyzny.

W celu rozróżnienia szeregów błędzenia losowego i szeregów persystentnych i antypersystentnych przeprowadzono symulacje Monte Carlo wymiaru fraktalnego szeregów błędzenia losowego. W tabl. 1 zawarto statystyki tych symulacji wraz z wynikami testów normalności rozkładu uzyskanych wartości. Łącznie przeprowadzono 800 symulacji, po 100 w każdej próbie.

**TABL. 1. STATYSTYKI WYMIARU FRAKTALNEGO SYMULOWANYCH SZEREGÓW
BŁĄDZENIA LOSOWEGO METODĄ MONTE CARLO**

Wyszczególnienie	N = 200		N = 500		N = 1000		N = 1600	
	próby							
	1	2	1	2	1	2	1	2
\bar{x}	1,3707	1,3731	1,3788	1,3809	1,3843	1,3790	1,3765	1,3703
S	0,1183	0,1140	0,1127	0,1145	0,1100	0,1182	0,1112	0,1017
Minimum	1,1479	1,1485	1,1342	1,1549	1,1580	1,1347	1,1492	1,1573
Maksimum	1,6568	1,6594	1,6160	1,6372	1,6125	1,6151	1,6106	1,6041
TN Kołmogorowa-Smirnowa	$p > 0,20$							
TN Lillieforsa	$p > 0,20$							
TN Shapiro-Wilka ..	$p=0,1421$	$p=0,1591$	$p=0,2305$	$p=0,3516$	$p=0,1939$	$p=0,1716$	$p=0,2338$	$p=0,4346$

U w a g a. \bar{x} – średnia arytmetyczna, S – odchylenie standardowe, TN – test normalności, p – poziom istotności.
Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Na podstawie uzyskanych wyników testów normalności (tabl. 1) stwierdzono, że rozkład wymiaru fraktalnego jest normalny, o średniej i odchyleniu standardowym przyjętych z uśrednionych procesów symulowanych. Na tej podstawie skonstruowano tablice istotności wymiaru MPP . Dane te dla wybranych poziomów istotności zaprezentowano w tabl. 2. Weryfikacji podlega hipoteza zerowa: proces generujący szereg czasowy jest procesem błędzenia losowego.

**TABL. 2. GRANICE ODRZUCENIA HIPOTEZY
BŁĄDZENIA LOSOWEGO SZEREGÓW
CZASOWYCH DLA WYMIARU MPP**

N a – dolna granica b – górna granica	Poziom istotności α		
	0,2	0,1	0,05
200 a	1,2234	1,1813	1,1447
..... b	1,5204	1,5626	1,5991
500 a	1,2347	1,1935	1,1578
..... b	1,5250	1,5662	1,6019
1000 a	1,2357	1,1942	1,1584
..... b	1,5277	1,5691	1,6050
1600 a	1,2371	1,1985	1,1650
..... b	1,5097	1,5484	1,5819

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

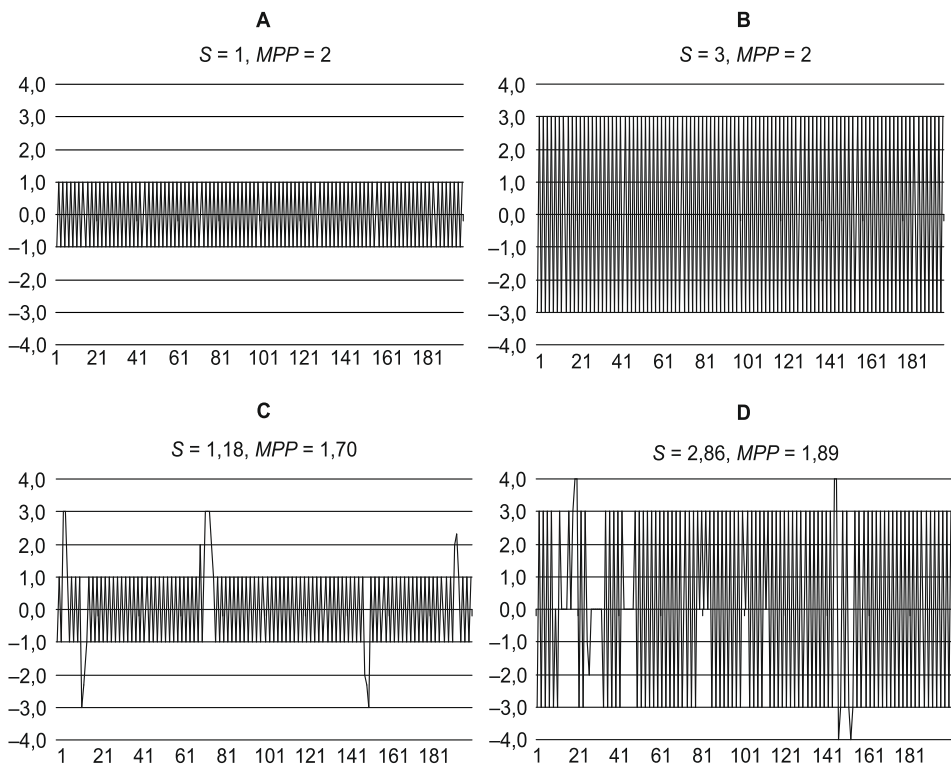
W zależności od wartości MPP można wyróżnić trzy klasy szeregów czasowych:

1. Wartości MPP poniżej dolnej granicy oznaczają szeregi persystentne, a więc procesy ze wzmacnianiem trendu. Są to szeregi przewidywalne;

2. Wartości *MPP* pomiędzy dolną a górną granicą oznaczają szeregi, w których przebieg może być kształtowany przez procesy błędzenia losowego. Są to szeregi nieprzewidywalne;
3. Wartości *MPP* powyżej górnej granicy oznaczają szeregi antypersystentne, a więc procesy charakteryzowane przez zjawisko powrotu do wartości średniej. Są one (tak jak szeregi persystentne) przewidywalne.

Wymiar *MPP*, w porównaniu z odchyleniem standardowym, ma interesujące właściwości w ocenie zmienności szeregów stóp wzrostu. Natura tych szeregów jest antypersystentna, jednak zdarzają się pewne nietypowe sytuacje. Warto zobaczyć, jak w takiej sytuacji zachowuje się odchylenie standardowe i wymiar *MPP*. Pewne szczególne przypadki ujęto na wykr. 3.

WYKR. 3. SZCZEGÓLNE PRZYPADKI ZACHOWANIA SIĘ SZEREGÓW CZASOWYCH STÓP WZROSTU



U w a g a. S – odchylenie standardowe.

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Jeśli przez ryzyko będziemy rozumieć odchylenia od stanu oczekiwanego, to z szeregiem A związane jest mniejsze ryzyko niż z szeregiem B (wykr. 3). Odchylenie standardowe dla szeregu A wynosi 1, a dla szeregu B przyjmuje wartość 3. Jednak inwestor przyzwyczaja się do takiej sytuacji i naturalnie staje się dla niego, że z szeregiem A związane są mniejsze odchylenia, a z szeregiem B – większe. Z tego punktu widzenia ryzyko jest takie samo, ponieważ zmiany notowań są w pełni przewidywalne. Wartości wymiaru *MPP* wynoszą tutaj 2 i dla inwestora oznacza to, że po każdym odchyleniu stopy zwrotu w górę nastąpi takie samo co do siły odchylenie stopy zwrotu w dół.

Jeśli w szeregu A pojawią się zakłócenia (wykr. 3C), to inwestor stanie się już mniej pewny przyszłych zmian. Wartość odchylenia standardowego jest jednak ciągle mniejsza niż dla szeregu B, co wskazuje na mniejsze ryzyko. Tymczasem inwestor jest pewny zachowania szeregu B, a niepewny zachowania szeregu C. Obrazują to wartości wymiaru *MPP*. Szereg bez zakłóceń ma wymiar 2, a szereg z zakłóceniami w dążeniu do wartości średniej – 1,70.

Może się zdarzyć, że zakłócenia obniżą wartość odchylenia standardowego, jak w szeregu D w porównaniu do szeregu B (tutaj z 3 na 2,86). Jednak z punktu widzenia oczekiwań inwestora sytuacja jest już mniej stabilna, co obrazuje wymiar *MPP* = 1,89, a wartość mniejsza niż 2 wskazuje na obecność szumu.

Wymiar fraktalny służy tu jako metoda pozwalająca na ocenę stopnia stabilności wahań. Im wartości wymiaru fraktalnego bliższe 2, tym bardziej są stabilne, bez względu na zakres wahań. Niższe wartości sugerują pojawianie się zakłóceń: im bliżej górnej granicy odrzucenia hipotezy błędzenia losowego, tym więcej zakłóceń w szeregu stóp wzrostu.

STACJONARNOŚĆ SZEREGÓW CZASOWYCH

Weryfikacja hipotezy błędzenia losowego pozwala na lepsze poznanie właściwości statystycznych analizowanych szeregów czasowych cen instrumentów finansowych. Najczęściej weryfikuje się hipotezę o całkowitym braku korelacji w procesie generującym wartości szeregów czasowych oraz, rozszerzając pole badań, o braku jakichkolwiek zależności. Badanie braku zależności jest badaniem szerszym niż badanie braku korelacji. Wykluczenie zależności jednocześnie wyklucza występowanie korelacji, natomiast wykluczenie korelacji nie musi oznaczać jednoczesnego wykluczenia zależności. W przypadku braku korelacji jakiegokolwiek liniowe modele cen historycznych nie pozwalają na lepsze przewidywanie cen w przyszłości. Jednak brak korelacji nie wyklucza występowania zależności nieliniowych, a takie mogłyby poprawić przewidywanie (Czekaj, Woś i Żarnowski, 2001). Dlatego badanie zależności jest przydatniejsze w praktyce. Proces błędzenia losowego opisuje się równaniem:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (12)$$

gdzie:

y_t – szereg czasowy,

ε_t – proces niezależnych zmiennych losowych ciągłych o jednakowym rozkładzie ze średnią 0 i skończoną wariancją.

Szereg czasowy, który podlega procesowi błędzenia losowego, może dryfować w górę lub w dół tylko w rezultacie szoków losowych.

Z procesami stochastycznymi wiąże się pojęcie stacjonarności. Proces stochastyczny Y_t określa się jako stacjonarny, jeżeli spełnia jednocześnie trzy warunki:

1. $E(Y_t) = \text{const}$ – wartość średnia jest stała w czasie;
2. $\text{Var}(Y_t) = \text{const}$ – wariancja jest stała w czasie;
3. $\text{Cov}(Y_t, Y_{t+j}) = \sigma_j$ – wartość kowariancji dla dwóch momentów obserwacji zależy od odstępu między tymi momentami, a nie od ich wartości.

Jeżeli jeden z powyższych warunków nie jest spełniony, to taki proces określa się jako niestacjonarny.

Błądzenie losowe to przykład procesu niestacjonarnego, w którym wariancja jest zmienna w czasie (Maddala, 2006). Zmienia się także kowariancja pomiędzy sąsiednimi wartościami (Cryer, 1986). Wartości szeregu czasowego błędzenia losowego mogą znacznie odbiegać od wartości średniej.

Niestacjonarność szeregów czasowych stanowi poważny problem w przypadku modelowania zależności, ponieważ można otrzymywać dobre modele nawet dla zmiennych, dla których brak jest związku przyczynowo-skutkowego (Phillips, 1986). Dotyczy to zarówno trendu deterministycznego (Charemza i Deadman, 1997), jak i stochastycznego (Newbold i Davies, 1978). Analiza regresji powinna zostać przeprowadzona na stacjonarnych szeregach czasowych, aby była wiarygodna. Szeregi niestacjonarne można doprowadzić do stacjonarności poprzez różnicowanie ich wartości. Jednak nie każdy szereg można doprowadzić do stacjonarności, wyznaczając pierwsze różnice – niekiedy trzeba wyznaczać je więcej niż jeden raz. Szereg niestacjonarny, który można sprowadzić do szeregu stacjonarnego, obliczając przyrosty d razy, nazywa się szeregiem zintegrowanym stopnia d (Charemza i Deadman, 1997). Błądzenie losowe jest procesem zintegrowanym w stopniu pierwszym.

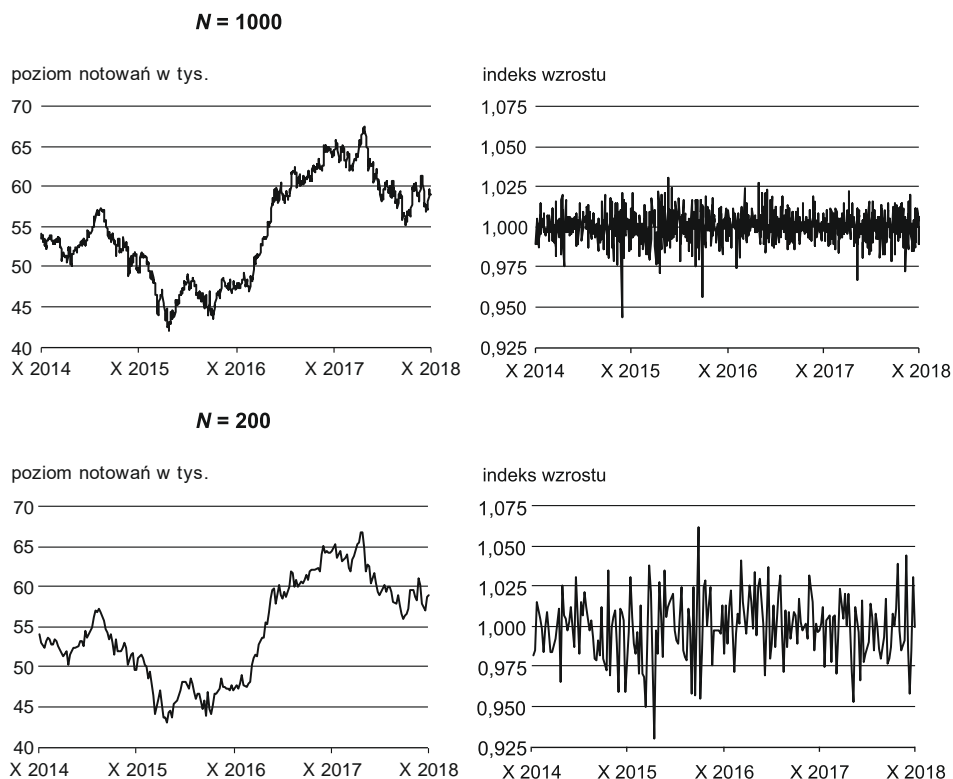
Isntnieje wiele testów oceny stacjonarności szeregów czasowych. Do najpopularniejszych należą: DF, ADF, PP i KPSS (Dickey i Fuller, 1979, 1981; Kwiatkowski, Phillips, Schmidt i Shin, 1992; Phillips i Perron, 1988).

PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA WYMIARU FRAKTALNEGO

Praktyczne zastosowanie wymiaru fraktalnego omówiono na przykładzie szeregu czasowego poziomów zamknięcia i stóp wzrostu indeksu giełdowego WIG oraz na przykładzie kształtowania się dziennych stóp wzrostu notowań wybranych spółek giełdowych.

Na wyk. 4 zaprezentowano kształtowanie się poziomów oraz indeksów wzrostu danych dziennych ($N = 1000$) i tygodniowych ($N = 200$) indeksu WIG w okresie od października 2014 r. do października 2018 r.

WYKR. 4. POZIOM NOTOWAŃ I INDEKSY WZROSTU INDEKSU GIEŁDOWEGO WIG



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW.

Uzyskane wartości wymiaru fraktalnego (tabl. 3) – dla $N = 1000$ jest to 1,3670, a dla $N = 200$ jest to 1,3716 – pozwalają na sklasyfikowanie szeregów jako procesów błędzenia losowego, a ściślej rzecz biorąc, uzyskane wartości nie pozwalają na odrzucenie hipotezy o błędzeniu losowym. Z kolei wartości wymiaru fraktalnego dla szeregów stóp wzrostu, odpowiednio $MPP = 1,6916$ oraz $MPP = 1,6658$, pozwalają na odrzucenie hipotezy błędzenia losowego na rzecz procesu o charakterze antypersystentnym. W szeregach stóp wzrostu występuje tendencja do oscylacji wokół poziomu przeciętnego.

**TABL. 3. STATYSTYKI SZEREGÓW
CZASOWYCH POZIOMÓW I PRZYROSTÓW
INDEKSU GIEŁDOWEGO WIG**

Szeregi a – poziomów b – przyrostów	<i>MPP</i>	Test ADF	
		<i>t</i>	<i>p</i>
<i>N</i> = 1000 a	1,3670	-1,7163	0,7436
b	1,6916	-29,1944	0,0000
<i>N</i> = 200 a	1,3716	-1,7637	0,7188
b	1,6658	-16,0766	0,0000

U w a g a. *t* – statystyka *t*-Studenta, *p* – poziom istotności.

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Porównanie wyników dla szeregu $N = 1000$ z wynikami dla szeregu $N = 200$ prowadzi do wniosku, że częstotliwość obserwacji nie wpłynęła znacząco na uzyskane rezultaty. O ile w przypadku szeregów czasowych poziomów takie wyniki nie zaskakują, o tyle w przypadku szeregów stóp wzrostu są dość interesujące. Okazuje się, że wymiar fraktalny jest niewrażliwy na skalę wahań, ponieważ dla szeregu stóp wzrostu $N = 1000$ uzyskano odchylenie standardowe $S = 0,0088$, a dla szeregu $N = 200$ odchylenie standardowe jest wyraźnie większe i wynosi $S = 0,0206$. Tymczasem wartości wymiaru fraktalnego to odpowiednio $MPP = 1,6916$ oraz $MPP = 1,6658$. W świetle idei wymiaru fraktalnego takie wyniki są poprawne, ponieważ odchylenie standardowe mierzy skalę wahań, która dla szeregu stóp wzrostu $N = 200$ jest wyraźnie większa niż dla szeregu $N = 1000$, co pokazuje wykr. 4. Wymiar fraktalny mierzy zagęszczenie szeregu na płaszczyźnie – w przedmiotowym przykładzie, mimo różnej skali wahań, okazuje się ono zbliżone.

Wyniki testu ADF stanowią klasyczny rezultat testowania szeregów danych finansowych: szeregi poziomów okazują się niestacjonarne, a szeregi przyrostów (stóp wzrostu) – stacjonarne. Oznacza to, że nie można odrzucić hipotezy błędzenia losowego szeregów czasowych poziomów indeksu giełdowego. Ogólny obraz sytuacji, jaki uzyskano tutaj dzięki zastosowaniu wymiaru fraktalnego oraz testu ADF, jest podobny.

Analizę kształtowania szeregów czasowych dziennych stóp wzrostu wybranych spółek giełdowych przeprowadzono przy użyciu odchylenia standardowego oraz wymiaru fraktalnego (tabl. 4). Analizowano stopy wzrostu największych spółek giełdowych w latach 2015–2018. Pod uwagę brano spółki, których zakres dziennych zmian mieścił się w przedziale $(-20\%, 20\%)$. Z tego powodu nie znalazła się wśród nich np. spółka JSW, której notowania w badanym okresie aż trzy razy zmieniały się powyżej 20% dziennie, co powoduje znaczne zawyżenie odchylenia standardowego w stosunku do pozostałych spółek.

Dla wybranej grupy spółek odchylenie standardowe dziennych stóp wzrostu kształtowało się w przedziale od 1,55 p.p. dla Asseco do 2,29 p.p. dla KGHM, a wymiaru fraktalnego – od 1,6439 dla Orange Polska do 1,7770 dla PKN Orlen.

TABL. 4. ODCHYLENIE STANDARDOWE I WYMIAR FRAKTALNY SZEREGÓW CZASOWYCH STÓP WZROSTU NOTOWAŃ WYBRANYCH SPÓŁEK W LATACH 2015–2018

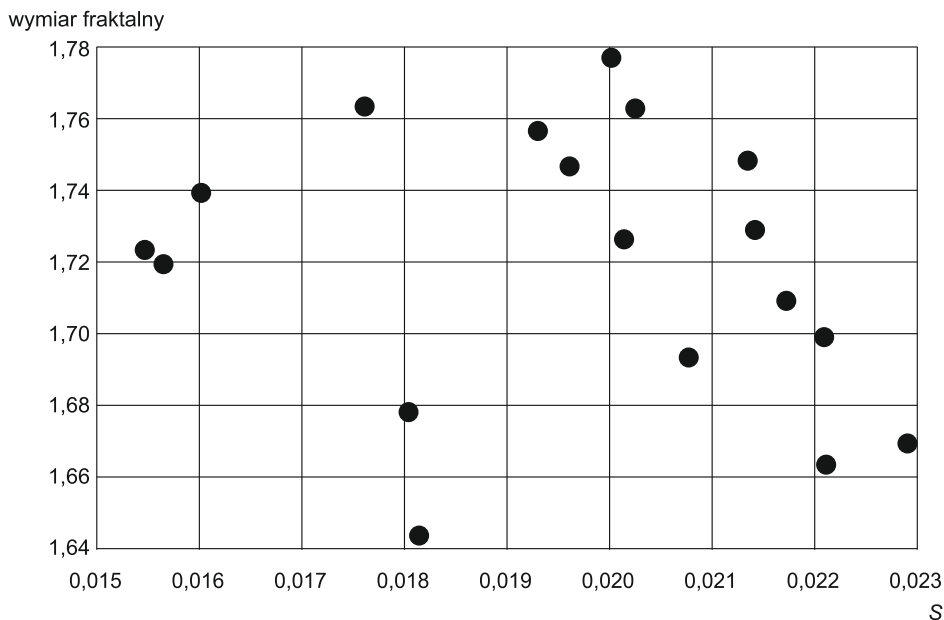
Spółki	S	Wymiar fraktalny	Wartość księgowa w tys. zł
Alior	0,0201	1,7265	6486
Asseco	0,0155	1,7234	5605
CCC	0,0221	1,6992	999
Cyfrowy Polsat	0,0176	1,7635	959
Energa	0,0214	1,7290	10263
Eurocash	0,0217	1,7093	975
KGHM	0,0229	1,6696	18524
Lotos	0,0196	1,7467	11955
LPP	0,0221	1,6637	2555
mBank	0,0208	1,6935	15214
Orange Polska	0,0181	1,6439	10501
PEKAO	0,0157	1,7195	22797
PGE	0,0202	1,7628	47196
PGNiG	0,0193	1,7566	35986
PKN Orlen	0,0200	1,7770	35634
PKO BP	0,0180	1,6783	37722
PZU	0,0160	1,7393	14169
Tauron	0,0213	1,7483	18968

Źródło: obliczenia własne.

Na wyk. 5 przedstawiono związek pomiędzy otrzymanymi wartościami odchylenia standardowego i wymiaru fraktalnego. Związek ten jest wprawdzie ujemny, lecz bardzo słaby. Wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona wynosi w tym przypadku $-0,19$.

Otrzymane wartości wymiaru fraktalnego pozwalają na sklasyfikowanie wszystkich analizowanych szeregów jako antypersystentnych. Jest to zgodne z naturą szeregów czasowych stóp wzrostu. Zważywszy na właściwości wymiaru fraktalnego oraz odchylenia standardowego, uzyskaną słabą zależność korelacyjną pomiędzy tymi miarami dla badanych szeregów czasowych należy uznać za oczekiwaną. Dowodzi ona, że miary te umożliwiają uchwycenie innych, unikalnych właściwości ocenianych szeregów czasowych. Zgodnie z uwagami metodologicznymi wymiar fraktalny uzupełnia odchylenie standardowe o informacje na temat stabilizacji zmian. Im wyższa jest wartość wymiaru fraktalnego, tym bardziej przewidywalna staje się zmienność.

WYKR. 5. ODCHYLENIE STANDARDOWE S A WYMIAR FRAKTALNY SZEREGÓW CZASOWYCH STÓP WZROSTU NOTOWAŃ



Źródło: jak przy wyk. 4.

W badaniach empirycznych dość często podnosi się znaczenie wielkości przedsiębiorstwa dla zmienności notowań. Z reguły notowania większych spółek odznaczają się większą płynnością, co sprzyja ograniczaniu ryzyka. W przedmiotowym badaniu związek wartości księgowej z odchyleniem standardowym jest ujemny, lecz bardzo słaby i statystycznie nieistotny ($r = -0,1019$; $p > 0,3$). Ujemny wynik oznacza, że przedsiębiorstwa o większej wartości księgowej charakteryzują się średnio mniejszą zmiennością notowań, ale jest to zależność znikoma. Tymczasem związek wartości księgowej z wymiarem fraktalnym jest dodatni i chociaż słaby, to statystycznie istotny ($p < 0,1$), a przy tym silniejszy od poprzedniego ($r = 0,3213$). Dodatni wynik oznacza, że przedsiębiorstwa o większej wartości księgowej charakteryzują się średnio większą wartością wymiaru fraktalnego, co sprzyja przewidywalności zmian. Wyniki te wymagają jednak szerszych badań.

PODSUMOWANIE

Wymiar fraktalny stanowi ciekawą alternatywę w stosunku do klasycznych metod oceny procesów kształtowania wartości szeregów czasowych. Do jego zalet należy dość prosta interpretacja: im mniejszy wymiar, tym silniejsze zjawie-

sko podtrzymania trendu, a im większy wymiar, tym silniejsze zjawisko powrotu do wartości średniej. Dodatkowym ułatwieniem interpretacyjnym jest unormowanie wymiaru fraktalnego w granicach [1, 2], tj. pomiędzy wymiarem euklidesowym prostej i płaszczyzny. Jak pokazano na przykładzie, można on być w tej samej postaci stosowany do oceny zarówno poziomów szeregów czasowych, jak i ich przyrostów.

Interesujące jest porównanie wyników, jakie daje wymiar fraktalny dla szeregów stóp wzrostu, z wynikami odchylenia standardowego. Odchylenie standardowe pozwala na ocenę zmienności: im jest większe, tym większa zmienność. W klasycznej teorii rosnąca zmienność oznacza wyższe ryzyko, jednak większa zmienność nie musi się przekładać na wzrost nieprzewidywalności. Tymczasem idea wymiaru fraktalnego opiera się na zagęszczeniu szeregu na płaszczyźnie. Większy wymiar fraktalny to rosnące zagęszczenie, ale i wyższa przewidywalność, a także tendencja szeregu czasowego do powrotu do wartości średniej. Odchylenie standardowe pozwala tu na ocenę skali odchylenia od poziomu średniego. Pod tym względem można powiedzieć, że odchylenie standardowe i wymiar fraktalny się uzupełniają. Z drugiej strony niskie wartości wymiaru fraktalnego oznaczają również większą przewidywalność. Nieprzewidywalne natomiast stają się szeregi o wymiarze fraktalnym, który nie pozwala na odrzucenie hipotezy błędzenia losowego.

W interpretacji wymiaru fraktalnego należy rozróżnić analizę szeregów poziomów zmiennych i analizę szeregów stóp wzrostu. Szeregi poziomów będą miały z reguły niższe wymiary fraktalne – bliższe 1. Im wartość wymiaru fraktalnego bliższa 1, tym silniejszy trend w ocenianym zjawisku. Wyższe wartości wymiaru fraktalnego będą upodabniały szeregi poziomów do szeregów błędzenia losowego. Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku szeregów stóp wzrostu. Tutaj wartości wymiaru fraktalnego są z reguły wyższe. Im wartości wymiaru fraktalnego bliższe 2, tym bardziej są stabilne, bez względu na zakres wahań. Natomiast niższe wartości wymiaru fraktalnego sugerują pojawianie się zakłóceń: im niższa wartość wymiaru fraktalnego szeregów stóp wzrostu, tym więcej zakłóceń w takim szeregu. Wymiar fraktalny stanowi tu metodę pozwalającą na ocenę stopnia stabilności wahań.

Ogólny wynik klasyfikacyjny uzyskany w analizowanym przykładzie jest zgodny z wynikami testów stacjonarności ADF. Jednak w porównaniu do testów ADF unormowanie wymiaru fraktalnego oraz jego intuicyjna interpretacja dają nowe możliwości oceny kształtowania wartości szeregów czasowych. Pewnym ograniczeniem stosowania wymiaru fraktalnego jest konieczność badania stosunkowo długich szeregów czasowych, umożliwiających dokonywanie podziałów, chociaż – jak pokazano na przykładzie – przejście z danych dziennych na dane tygodniowe, a tym samym skrócenie długości szeregu z 1000 do 200 obserwacji, nie spowodowało istotnych zmian wyników.

BIBLIOGRAFIA

- Bhatt, S. J., Dedania, H. V., Shah, V. R. (2015). Fractal dimensional analysis in financial time series. *International Journal of Financial Management*, 5(2), 57–62.
- Buła, R. (2017). Analiza wymiaru fraktalnego spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie – aspekty metodyczne. *Nauki o Finansach*, 1(30), 9–27.
- Cervantes-De la Torre, F., González-Trejo, J. I., Real-Ramírez, C. A., Hoyos-Reyes, L. F. (2013). Fractal dimension algorithms and their application to time series associated with natural phenomena. *Journal of Physics: Conference Series*, 475, 1–10. DOI: 10.1088/1742-6596/475/1/012002.
- Charemza, W., Deadman, D. (1997). *Nowa ekonometria*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
- Chen, Y. (2013). A Set of Formulae on Fractal Dimension Relations and its Application to Urban Form. *Chaos, Solitons & Fractals*, 54, 150–158. DOI: 10.1016/j.chaos.2013.07.010.
- Cryer, J. D. (1986). *Time Series Analysis*. Boston: Duxbury Press.
- Czekaj, J., Woś, M., Żarnowski, J. (2001). *Efektywność giełdowego rynku akcji w Polsce: z perspektywy dziesięciolecia*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Dickey, D. A., Fuller, W. A. (1979). Distributions of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427–431. DOI: 10.1080/01621459.1979.10482531.
- Dickey, D. A., Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49(4), 1057–1072. DOI: 10.2307/1912517.
- Dubuc, B., Quiniou, J. F., Roques-Carmes, C., Tricot, C., Zucker, S. W. (1989). Evaluating the Fractal Dimension of Profiles. *Physical Review A*, 39(3), 1500–1512. DOI: 10.1103/PhysRevA.39.1500.
- Gómez, C., Mediavilla, Á., Hornero, R., Abásolo, D., Fernández, A. (2009). Use of the Higuchi's fractal dimension for the analysis of MEG recordings from Alzheimer's disease patients. *Medical Engineering & Physics*, 31(3), 306–313. DOI: 10.1016/j.medengphy.2008.06.010.
- Guoqiang, S. (2002). Fractal dimension and fractal growth of urbanized areas. *International Journal of Geographical Information Science*, 16(5), 419–437. DOI: 10.1080/13658810210137013.
- Halley, J. M., Kunin, W. E. (1999). Extinction Risk and the $1/f$ Family of Noise Models. *Theoretical Population Biology*, 56(3), 215–230. DOI: 10.1006/tpbi.1999.1424.
- Harne, B. P. (2014). Higuchi Fractal Dimension Analysis of EEG Signal Before and After OM Changing to Observe Overall Effect on Brain. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 4(4), 585–592. DOI: 10.11591/ijece.v4i4.5800.
- Hurst, H. E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of American Society of Civil Engineers*, 116, 770–799.
- Kale, M., Butar Butar, F. (2011). Fractal analysis of time series and distribution properties of Hurst exponent. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 5(1), 8–19.
- Kapecka, A. (2013). Fractal Analysis of Financial Time Series Using Fractal Dimension and Pointwise Hölder Exponents. *Dynamic Econometric Models*, (13), 107–125. DOI: 10.12775/DEM.2013.006.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P., Schmidt, P., Shin, Y. (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We that Economic Time Series Have a Unit Root?. *Journal of Econometrics*, 54(1–3), 159–178.
- Maddala, G. S. (2006). *Ekonometria*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman and Company.

- Mosdorf, R. (1997). *Dynamiczny model wrzenia na podstawie metody chaosu deterministycznego*. Białystok: Wydawnictwo Politechniki Białostockiej.
- Newbold, P., Davies, N. (1978). Error Mis-Specification and Spurious Regressions. *International Economic Review*, 19(2), 513–519. DOI: 10.2307/2526317.
- Peters, E. E. (1997). *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*. Warszawa: WIG-Press.
- Phillips, P. C. B. (1986). Understanding spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 33(3), 311–340. DOI: 10.1016/0304-4076(86)90001-1.
- Phillips, P. C. B., Perron, P. (1988). Testing for a Unit Root in Time Series Regression. *Biometrika*, (75), 335–346.
- Przekota, G., Przekota, D. (2004). Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych kursów walut metodą podziału pola. *Badania Operacyjne i Decyzje*, 14(3–4), 67–82.
- Siemieniuk, N. (2001). *Fraktalne właściwości polskiego rynku kapitałowego*. Białystok: Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku.
- Sy-Sang, L., Feng-Yuan, C. (2009). Fractal dimensions of time sequences. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(15), 3100–3106. DOI: 10.1016/j.physa.2009.04.011.
- Zawadzki, H. (1996). *Chaotyczne systemy dynamiczne: elementy teorii i wybrane przykłady ekonomiczne*. Katowice: Akademia Ekonomiczna.
- Zeug-Żebro, K. (2015). Zastosowanie wybranych metod szacowania wymiaru fraktalnego do oceny poziomu ryzyka finansowych szeregów czasowych. *Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe*, 227, 109–124.
- Zwolankowska, M. (2001). *Fraktalna geometria polskiego rynku akcji*. Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.