Jacek BIAŁEK

Ogólna formuła indeksu cen

Streszczenie. *W artykule przedstawiono i poddano dyskusji propozycję ogólnej formuły indeksu cen. Pokazano, że formuła ta spełnia postulaty pochodzące z systemu minimalnych wymagań Martiniego. Pokazano również (analitycznie i symulacyjnie), iż zaprezentowana formuła spełnia test dla granic Laspeyresa i Paasche'ego. W badaniu symulacyjnym przeprowadzono także analizę zmienności generowanych wartości indeksu w zależności od ustalonych parametrów składowych.*

Słowa kluczowe: indeksy cen, aksjomatyczna teoria indeksów cen, uogólnienie indeksu cen.

Pierwsze wersje indeksów cen były formułami nieważonymi. Jednym z pionierów, którzy zaczęli je stosować był francuski ekonomista Dutot. Opublikował on wyniki badań w słynnej pracy *Reflexions Politiques sur les Finances et le Commerce* (Dutot, 1738). Postawiono przed nim problem oszacowania inflacji dla lat 1515—1735 na dworze Ludwika XV. Dutot zaproponował wówczas koszyk dóbr (obejmował m.in.: ceny kurczaka, królika, gołębia, stogu siana, dzienne wynagrodzenie mężczyzn i kobiet, ceny usług) i jako pierwszy zaproponował uśrednienie cen. Jego formuła nie spełnia jednak podstawowego wymogu indeksów cen, mianowicie jej wartości nie zawsze mieszczą się w przedziale wyznaczonym przez najmniejszą i największą wartość cząstkowych indeksów cen.

Nieważonym indeksem, który — jak się uważa — jako pierwszy pokonał tę trudność, był indeks Carli (1764), profesora astronomii w Padwie. Profesor Carli również zmierzył się z problemem oszacowania inflacji dla lat 1500—1750; przyjął koszyk dóbr składający się z trzech składników: wina, oliwy i zboża. Wkrótce jednak dostrzeżono niedoskonałość nieważonych formuł indeksów cen, nie nadawały się bowiem do oceny dynamiki cen w niejednorodnym koszyku dóbr, których konsumowane ilości wyrażone były w różnych jednostkach i przez to traciły na porównywalności. W konsekwencji wielu ekonomistów zaproponowało własne pomysły ważenia cen dóbr w koszyku i tak powstały formuły: Laspeyresa (1864, 1871), Drobischa (1871), Sidgwicka (1883), Paasche'ego (1874), Palgrave'a (1886), Edgewortha (1887), Marshalla (1887), Walsha (1901), Fishera (1922), Törnqvista (1936) czy Geary'ego (1958) oraz Khamisa (1970).

Wśród wielu różnych kierunków rozwoju teorii indeksów statystycznych (m.in. podejście stochastyczne czy ekonomiczne — Białek, 2012a) bardzo mocno osadzone jest tzw. ujęcie aksjomatyczne. W jego ramach określamy pożądane własności matematyczne indeksów (tzw. testy) i szukamy formuły indeksu, który spełniałby możliwie jak najwięcej postulatów. Omówienie testów (postulatów) wobec indeksów statystycznych znaleźć można w pracach: Fishera (1922), Welfego (1966), Krzysztofiaka i Luszniewicza (1997), Balka (1995) czy von der Lippego (2007). Badania aksjomatycznej teorii indeksów nie koncentrują się jednak tylko na uzupełnianiu listy aksjomatów czy poszukiwaniu relacji pomiędzy nimi. Część prac z tej dziedziny skupia się bowiem na poszukiwaniu zarówno formuł ogólnych o wymaganych własnościach (de Haan, 2002; Fattore, 2010), jak również takich formuł szczególnych, które spełniają możliwie najwięcej pożądanych aksjomatów (von der Lippe, 2007).

Celem artykułu jest omówienie proponowanych w literaturze przedmiotu ogólnych formuł indeksów cen oraz propozycja własnej formuły, której szczególnymi przypadkami są powszechnie używane indeksy: Laspeyresa, Paasche'ego, Fishera czy Marshalla i Edgewortha. Istotny argument motywujący do tego rodzaju poszukiwań stanowi fakt, że z reguły wygodniej jest ustalić grupę indeksów o określonych własnościach, by następnie jedynie sprawdzać, czy dana formuła indeksu (funkcjonująca lub nowa) jest jej elementem. Co więcej, manipulacja parametrami, od których uzależniona jest formuła ogólna, pozwala na konstrukcję zupełnie nowych indeksów o zadanych własnościach aksjomatycznych (charakterystycznych dla danej grupy), ale nadal nieznanych własnościach statystycznych (np. zmienności).

SYSTEM MINIMALNYCH WYMAGAŃ MARTINIEGO

Oznaczmy formułę indeksu cenowego określonego dla N komponentów jako $P(\boldsymbol{q}^s, \boldsymbol{q}^t, \boldsymbol{p}^s, \boldsymbol{p}^t)$,

gdzie:

$\boldsymbol{p}^s = \left[p_1^s, p_2^s, ..., p_N^s\right]'$ — wektor cen dla okresu bazowego s;
$\boldsymbol{p}^t = \left[p_1^t, p_2^t, ..., p_N^t\right]'$ — wektor cen dla okresu badanego t;
$\boldsymbol{q}^s = \left[q_1^s, q_2^s, ..., q_N^s\right]'$ — wektor ilości dla okresu bazowego s;
$\boldsymbol{q}^t = \left[q_1^t, q_2^t, ..., q_N^t\right]'$ — wektor ilości dla okresu badanego t.

W literaturze przedmiotu rozważa się tzw. systemy minimalnych wymagań wobec indeksów (*systems of minimum requirements*). Wyróżnić można tutaj system Martiniego (1992), Eichhorna i Voellera (1976) czy Olta (1996). Pierwszy z nich wydaje się być najmniej restrykcyjny, wymaga bowiem, aby dobrze skonstruowany indeks spełniał przynajmniej testy jednoznaczności, liniowej homogeniczności i współmierności. Przypomnijmy, że test jednoznaczności (*identity test*) postuluje, aby w przypadku braku zmian cen komponentów w okresie badanym w stosunku do bazowego, indeks dynamiki przyjął wartość jeden. Jest to szczególny przypadek testu liniowej homogeniczności (*linear homogeneity*), który zaproponował Laspeyres w postaci warunku:

$$P(\boldsymbol{q}^s, \boldsymbol{q}^t, \boldsymbol{p}^s, k\boldsymbol{p}^t) = kP(\boldsymbol{q}^s, \boldsymbol{q}^t, \boldsymbol{p}^s, \boldsymbol{p}^t) \tag{1}$$

jaki powinien być spełniony dla dowolnej dodatniej liczby k.

Test współmierności (*commensurability test*) oznacza, że indeks cen nie zmienia swej wartości liczbowej w przypadku zmiany jednostki miary jakiegokolwiek składnika cenowego, co można wyrazić formułą matematyczną:

$$P(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{q}^s, \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{q}^t, \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{p}^s, \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{p}^t) = P(\boldsymbol{q}^s, \boldsymbol{q}^t, \boldsymbol{p}^s, \boldsymbol{p}^t) \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{\Lambda}$ — dowolna diagonalna macierz o dodatnich wyrazach na głównej przekątnej.

PROPOZYCJA OGÓLNEJ FORMUŁY INDEKSU CEN

W literaturze przedmiotu można spotkać przynajmniej kilka ogólnych formuł indeksów cen, np. von der Lippe (2007) czy Białek (2010) omawiają uogólnienie indeksu Fishera w postaci:

$$P_{GF}(\alpha) = P_{La}^{\alpha} P_{Pa}^{1-\alpha} \tag{3}$$

gdzie $\alpha \in [0, 1]$, a P_{La} i P_{Pa} — odpowiednio indeks cen Laspeyresa i Paasche'ego, definiowane jako:

$$P_{La} = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i^s p_i^t}{\sum_{i=1}^{N} q_i^s p_i^s} \tag{4}$$

$$P_{Pa} = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^{N} q_i^t p_i^s} \tag{5}$$

Formuła (3) stanowi ważoną średnią geometryczną z wartości indeksów Laspeyresa i Paasche'ego, przy czym dla $\alpha = 0{,}5$ formuła ta sprowadza się do „klasycznego" indeksu Fishera. Można łatwo sprawdzić, że formuła ta spełnia aksjomaty z systemu Martiniego, a dodatkowo bezpośrednio z jej postaci wynika, iż indeks $P_{GF}(\alpha)$ zawsze spełnia test dla granic[1], bez względu na wartość parametru α.

Inne proste uogólnienia znanych formuł indeksów można spotkać w pracy Białka (2010), przy czym dalsze uogólnienia indeksu Fishera opisuje np. Białek (2011). Szeroką dyskusję nad ogólnymi klasami indeksów cen można znaleźć u Fattore'ego (2010) czy Białka (2012b). Wspomniane ogólne formuły indeksów cen, poza propozycją Fattore'ego, są uzależnione tylko od jednego parametru, co w pewnym sensie ogranicza zakres ich możliwych przypadków szczególnych. W artykule proponujemy więc ogólną definicję indeksu cen, która zależy od dwóch parametrów i której szczególnymi przypadkami są powszechnie znane indeksy Laspeyresa, Paasche'ego, Fishera czy Marshalla i Edgewortha. Jej postać jest następująca:

$$P_G(\alpha,\beta) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(\alpha q_i^s + (1-\alpha)q_i^t)p_i^t}{\sum_{i=1}^{N}(\alpha q_i^s + (1-\alpha)q_i^t)p_i^s}\right]^{\beta} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}((1-\alpha)q_i^s + \alpha q_i^t)p_i^t}{\sum_{i=1}^{N}((1-\alpha)q_i^s + \alpha q_i^t)p_i^s}\right]^{1-\beta} \tag{6}$$

gdzie $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Można zauważyć, że zachodzą następujące związki formuły (6) ze znanymi indeksami cen:

$$P_G(0, \frac{1}{2}) = P(1, \frac{1}{2}) = P_F \tag{7}$$

$$P_G(0,0) = P_G(1,1) = P_{La} \tag{8}$$

$$P_G(1,0) = P_G(0,1) = P_{Pa} \tag{9}$$

$$P_G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = P_{ME} \tag{10}$$

$$P_G(0,\beta) = P_{GF}(\beta) \tag{11}$$

przy czym formuły P_F i P_{ME} oznaczają odpowiednio indeks cenowy Fishera oraz Marshalla i Edgewortha[2].

[1] Autor artykułu nie spotkał w polskiej literaturze tłumaczenia na język polski terminu *Laspeyres and Paasche bounding test*. Test ten wymaga, aby dobrze skonstruowany indeks cen miał wartości mieszczące się w przedziale o granicach wyznaczonych przez wskazania indeksów Laspeyresa i Paasche'ego, dlatego w dalszej części artykułu nazywać go będziemy testem dla granic.

[2] W polskiej literaturze indeks Marshalla i Edgewortha nazywa się często indeksem Lexisa.

Zauważmy najpierw, że ogólna postać indeksu cen skonstruowana jest poprawnie w sensie Martiniego, tzn. spełnia testy jednoznaczności, liniowej homogeniczności i współmierności. Istotnie, jeśli $P^s = P^t$, to dla dowolnych wartości parametrów α i β spełniony jest test jednoznaczności, ponieważ zachodzi wówczas $P_G(\alpha,\beta) = 1$. Dalej, gdyby wszystkie ceny z okresu badanego t pomnożyć przez tę samą dodatnią liczbę rzeczywistą k, wówczas nowo uzyskany indeks $P'_G(\alpha,\beta)$ wskazywałby na wartość stanowiącą k-krotność jego wartości pierwotnej $P_G(\alpha,\beta)$, zgodnie z równaniem:

$$
\begin{aligned}
P'_G(\alpha,\beta) &= \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(\alpha q_i^s + (1-\alpha)q_i^t)kp_i^t}{\sum_{i=1}^{N}(\alpha q_i^s + (1-\alpha)q_i^t)p_i^s}\right]^{\beta} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}((1-\alpha)q_i^s + \alpha q_i^t)kp_i^t}{\sum_{i=1}^{N}((1-\alpha)q_i^s + \alpha q_i^t)p_i^s}\right]^{1-\beta} = \\
&= k^{\beta}\cdot k^{1-\beta}\cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(\alpha q_i^s + (1-\alpha)q_i^t)p_i^t}{\sum_{i=1}^{N}(\alpha q_i^s + (1-\alpha)q_i^t)p_i^s}\right]^{\beta} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}((1-\alpha)q_i^s + \alpha q_i^t)p_i^t}{\sum_{i=1}^{N}((1-\alpha)q_i^s + \alpha q_i^t)p_i^s}\right]^{1-\beta} = \\
&= kP_G(\alpha,\beta)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

A zatem test liniowej homogeniczności jest spełniony również w przypadku indeksu (6). Ostatecznie również możemy stwierdzić, że test współmierności także zachodzi, ponieważ dla dowolnych dodatnich liczb $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
P_G^{\lambda}(\alpha,\beta) &= \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(\alpha\frac{1}{\lambda_i}q_i^s + (1-\alpha)\frac{1}{\lambda_i}q_i^t)\lambda_i p_i^t}{\sum_{i=1}^{N}(\alpha\frac{1}{\lambda_i}q_i^s + (1-\alpha)\frac{1}{\lambda_i}q_i^t)\lambda_i p_i^s}\right]^{\beta} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}((1-\alpha)\frac{1}{\lambda_i}q_i^s + \alpha\frac{1}{\lambda_i}q_i^t)\lambda_i p_i^t}{\sum_{i=1}^{N}((1-\alpha)\frac{1}{\lambda_i}q_i^s + \alpha\frac{1}{\lambda_i}q_i^t)\lambda_i p_i^s}\right]^{1-\beta} = P_G(\alpha,\beta)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Dość ważnym, choć restrykcyjnym wymogiem wobec indeksów jest wspomniany test dla granic (von der Lippe, 2012; Białek, 2013). Pokażemy, że indeks $P_G(\alpha,\beta)$ spełnia również i ten test. Przyjmijmy najpierw następujące oznaczenia:

$$\theta_1(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha q_i^s + (1-\alpha) q_i^t) p_i^t \tag{14}$$

$$\theta_2(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha q_i^s + (1-\alpha) q_i^t) p_i^s \tag{15}$$

$$\theta_3(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} ((1-\alpha) q_i^s + \alpha q_i^t) p_i^t \tag{16}$$

$$\theta_4(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} ((1-\alpha) q_i^s + \alpha q_i^t) p_i^s \tag{17}$$

Funkcja $y = \ln(x)$ jest rosnąca i różnowartościowa, zatem ewentualne ekstremum lokalne dodatniej funkcji dwóch zmiennych $P_G(\alpha, \beta)$ jest osiągane dla tych samych argumentów, co dla funkcji $\ln(P_G(\alpha, \beta))$. Uwzględniając postać indeksu (6), wobec (14)—(17), otrzymujemy:

$$\ln(P_G(\alpha,\beta)) = \beta(\ln\theta_1(\alpha) - \ln\theta_2(\alpha)) + (1-\beta)(\ln\theta_3(\alpha) - \ln\theta_4(\alpha)) \tag{18}$$

Zauważmy, że wobec warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji $\ln(P_G(\alpha, \beta))$ mamy:

$$\frac{\partial \ln P_G(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \ln\theta_1(\alpha) - \ln\theta_2(\alpha) - \ln\theta_3(\alpha) + \ln\theta_4(\alpha) = 0 \tag{19}$$

co oznacza:

$$\ln\frac{\theta_1(\alpha)\theta_4(\alpha)}{\theta_2(\alpha)\theta_3(\alpha)} = 0 \tag{20}$$

i stąd otrzymujemy warunek:

$$\theta_1(\alpha)\theta_4(\alpha) = \theta_2(\alpha)\theta_3(\alpha) \tag{21}$$

Wobec wzoru (21), po uwzględnieniu postaci formuł (14)—(17) i po przeprowadzeniu redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i^s p_i^t \sum_{i=1}^{N} q_i^t p_i^s [\alpha^2 - (1-\alpha)^2] = \sum_{i=1}^{N} q_i^t p_i^t \sum_{i=1}^{N} q_i^s p_i^s [\alpha^2 - (1-\alpha)^2] \tag{22}$$

skąd wobec dowolności cen i ilości komponentów otrzymujemy $\alpha = \frac{1}{2}$. Widzimy jednak, że $P_G(\frac{1}{2}, \beta) = P_{ME}$, czyli dla $\alpha = \frac{1}{2}$ formuła ogólna nie zależy już od wartości parametru β. Innymi słowy, ponieważ:

$$\frac{\partial \ln P_G(\frac{1}{2}, \beta)}{\partial \beta} = 0 \tag{23}$$

to każdy punkt na płaszczyźnie postaci $(0{,}5; \beta)$ jest punktem stacjonarnym funkcji $\ln(P_G(\alpha, \beta))$. Bez konieczności sprawdzania warunku wystarczającego możemy zatem stwierdzić, że ewentualne ekstremum lokalne funkcji $P_G(\alpha, \beta)$ jest osiągane w każdym punkcie $(0{,}5; \beta)$ i wynosi P_{ME}. Wiadomo (von der Lippe, 2007), iż indeks Marshalla i Edgewortha spełnia test dla granic. Zauważmy również, że funkcja $P_G(\alpha, \beta)$ jest funkcją ciągłą na zbiorze domkniętym i ograniczonym $[0{,}1] \times [0{,}1]$, stanowiącym czworokąt wypukły. Z twierdzenia Weierstrassa wiemy więc, że wartość największa i najmniejsza funkcji $P_G(\alpha, \beta)$ jest przez nią osiągana i co więcej, znajduje się w zbiorze: $\{P_{ME}$, $P_G(0, 0)$, $P_G(0, 1)$, $P_G(1, 0)$, $P_G(1, 1)\}$. Biorąc pod uwagę, iż $\min\{P_{La}, P_{Pa}\} \leq$ $\leq P_{ME} \leq \max\{P_{La}, P_{Pa}\}$ i uwzględniając zależności (8) i (9) możemy wnioskować, że zachodzą również nierówności $\min\{P_{La}, P_{Pa}\} \leq P_G(\alpha, \beta) \leq \max\{P_{La}, P_{Pa}\}$. Formuła ogólna spełnia zatem także test dla granic, czyli jej wartości są ograniczone wartościami indeksów Laspeyresa i Paasche'ego. Test ten wywodzi się z tzw. ekonomicznego ujęcia w teorii indeksów (*economic approach*), gdzie przyjmuje się najczęściej, że wartości indeksu kosztów utrzymania (*Cost of Living Index* — COLI) zawarte są w obserwowalnych granicach wyznaczonych przez indeksy P_{La} i P_{Pa}.

PRZYKŁAD

Rozważmy grupę $N = 6$ komponentów agregatu, gdzie ceny i ilości w okresie badanym oraz bazowym opisują następujące wektory:

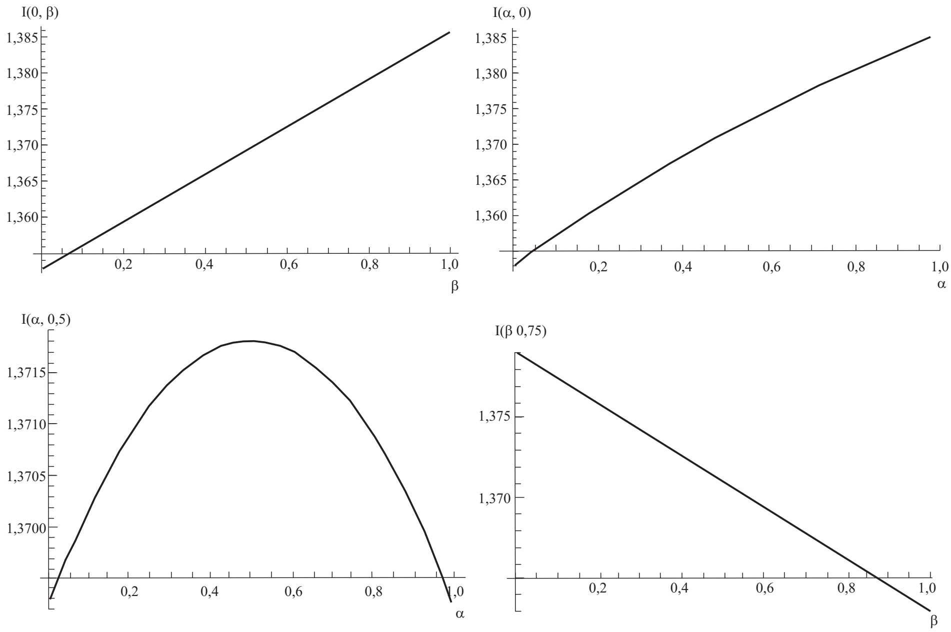
$$\boldsymbol{p}^s = [1000, 500, 300, 2, 50, 800]';$$

$$\boldsymbol{p}^t = [800, 700, 460, 3, 70, 1000]';$$

$$\boldsymbol{q}^s = [200, 200, 3000, 500, 340, 700]';$$

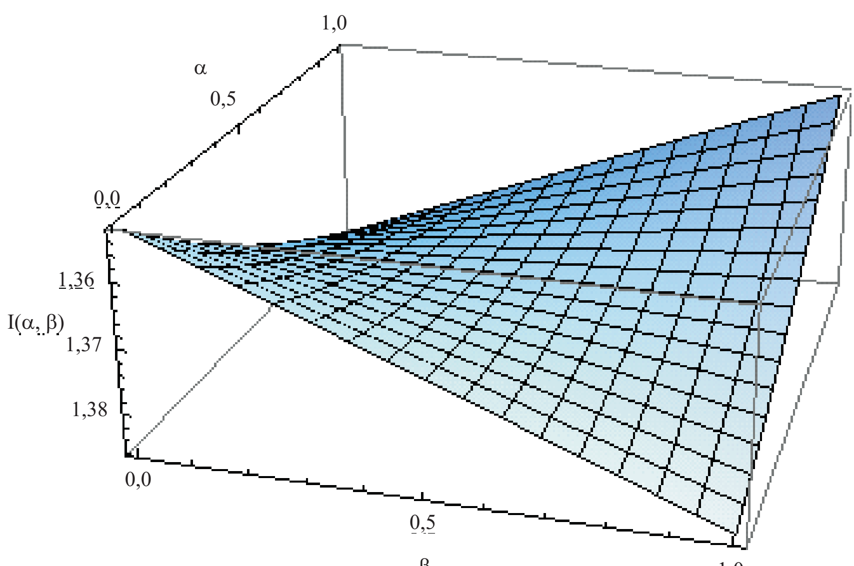
$$\boldsymbol{q}^t = [250, 150, 5000, 700, 250, 700]'.$$

Wykr. 1. WARTOŚCI FUNKCJI P_G (α, β) W ZALEŻNOŚCI OD JEDNEGO Z PARAMETRÓW I PRZY USTALONEJ WARTOŚCI DRUGIEGO



Ź r ó d ł o: obliczenia własne w programie Mathematica 6.0.

Wykr. 2. WARTOŚCI FUNKCJI P_G (a, b) W ZALEŻNOŚCI OD DWÓCH PARAMETRÓW



Ź r ó d ł o: jak przy wykr. 1.

Po obliczeniach uzyskujemy np. $P_G(0, \frac{1}{2}) = 1{,}370$, $P_G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 1{,}368$, najmniejsza wartość indeksu ogólnego wynosi $P_G(1, 0) = 1{,}352$, natomiast wartość największa to $P_G(0, 1) = 1{,}385$. Wskazania indeksu mogą więc mniej lub bardziej dynamicznie zmieniać się wraz ze zmianami parametrów α i β. Zależności te możemy obserwować na wykr. 1 i 2.

Na wykresach widzimy, że przy ustalonym jednym parametrze α lub β ogólna formuła indeksu cen może być zarówno malejącą, jak i rosnącą funkcją drugiego z parametrów. Jej wartości jednak zawsze mieszczą się w przedziale, którego krańce wyznaczają wartości indeksów Laspeyresa i Paasche'ego. Gdy $\beta = \frac{1}{2}$, wówczas funkcja $P_G(\alpha, \frac{1}{2})$ osiągnęła maksimum lokalne w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ wynoszące $P_G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = P_{ME}$, co potwierdziło słuszność wcześniejszych rozważań teoretycznych nad ogólnym indeksem (jest to ekstremum lokalne funkcji $P_G(\alpha, \beta)$).

BADANIE SYMULACYJNE

Rozważmy grupę $N = 5$ komponentów agregatu, gdzie ceny i ilości w okresie badanym i bazowym opisują następujące wektory losowe[3]:

$$\boldsymbol{p}^s = [LogNorm(3; 0{,}3), LogNorm(5; 0{,}2), LogNorm(6; 0{,}4),$$
$$LogNorm(4; 0{,}5), LogNorm(7; 0{,}6)]';$$

$$\boldsymbol{q}^s = [U(30000, 40000), U(200, 300), U(30, 50), U(200, 500), U(4, 6)]'$$

gdzie:

$LogNorm(\mu, \sigma)$ — zmienna losowa o rozkładzie lognormalnym z parametrami μ oraz σ,

$U(a, b)$ — zmienna losowa o rozkładzie równomiernym (jednostajnym) na przedziale $[a, b]$, $a < b$.

W eksperymencie wygenerowano $k = 100000$ wartości dla cen i ilości, a następnie dla każdej repetycji wyznaczono wartości indeksu $P_G(\alpha, \beta)$ dla różnych wartości parametrów α i β. Następnie dla tak wygenerowanych wartości indeksu (przy ustalonych parametrach) wyznaczono podstawową charakterystykę

[3] Dla okresu badanego losowano powtórnie wartości cen i ilości z tych samych rozkładów (Białek, 2013).

w postaci średniej arytmetycznej, odchylenia standardowego i współczynnika zmienności (tablica).

PODSTAWOWE STATYSTYKI OPISOWE DLA INDEKSU $P_G(\alpha, \beta)$ DLA RÓŻNYCH WARTOŚCI PARAMETRÓW α I β

Parametry	Indeks $P_G(\alpha,\beta)$				
	$\alpha=0$ $\beta=0$	$\alpha=0{,}25$ $\beta=0$	$\alpha=0{,}5$ $\beta=0$	$\alpha=0{,}75$ $\beta=0$	$\alpha=1$ $\beta=0$
Średnia arytmetyczna	1,093	1,037	1,037	1,039	1,030
Odchylenie standardowe	0,435	0,252	0,257	0,265	0,272
Współczynnik zmienności	0,397	0,243	0,247	0,255	0,264

(dok.)

Parametry	Indeks $P_G(\alpha,\beta)$				
	$\alpha=1$ $\beta=0{,}25$	$\alpha=1$ $\beta=0{,}5$	$\alpha=1$ $\beta=0{,}75$	$\alpha=0{,}5$ $\beta=0{,}5$	$\alpha=0{,}75$ $\beta=0{,}75$
Średnia arytmetyczna	1,037	1,044	1,063	1,037	1,036
Odchylenie standardowe	0,249	0,272	0,336	0,257	0,251
Współczynnik zmienności	0,240	0,260	0,316	0,247	0,242

Ź r ó d ł o: obliczenia własne w programie Mathematica 6.0.

Wnioski

Analizując wyniki zawarte w tablicy można raz jeszcze powtórzyć wniosek, że wartości indeksu wyraźnie zależą od przyjętych parametrów α i β, a różnice powstałe we wskazaniach indeksu są relatywnie duże. Wyznaczona symulacyjnie wartość oczekiwana indeksu waha się pomiędzy wartościami[4] 1,030 i 1,093, które są odpowiednio wyznaczone dla parametrów $(\alpha,\beta)=(1,0)$ i $(\alpha,\beta)=(0,0)$. Biorąc pod uwagę, że $P_G(1,0)=P_{Pa}$ i $P_G(0,0)=P_{La}$ otrzymujemy właściwie symulacyjne potwierdzenie testu dla granic. Wychodząc jednak z założenia, że poza estymacją punktową indeksu cen interesuje nas także poziom zmienności estymatora indeksu, należy zwrócić uwagę na fakt, iż oszacowany współczynnik zmienności również bardzo wyraźnie zależy od parametrów przyjętych w badaniu. Przykładowo, największe zróżnicowanie wśród generowanych wartości indeksu obserwowano dla $(\alpha,\beta)=(0,0)$. Odpowiada to indeksowi cen Laspeyresa, który przecież jest najczęściej stosowany przy pomia-

[4] Jest to relatywnie duża różnica, ponieważ w pierwszym przypadku stwierdzamy średni wzrost cen o 3%, w drugim zaś o 9,3%. Oczywiście należy tu pamiętać, że w obu przypadkach mamy inne założenia co do ustalonego okresu, z którego pochodzą informacje o wartościach komponentów.

rze inflacji (White, 1999). W przypadku indeksu Fishera ($P_G(1;0,5)$ zróżnicowanie wskazań wcale nie jest najmniejsze, choć najczęściej używa się go do szacowania obciążenia *CPI*[5] z powodu substytucji dóbr (De Haan, 2002; Hałka, Leszczyńska, 2011). A zatem można dojść do wniosku, iż w praktyce dość istotny jest dobór parametrów α i β, ponieważ nie tylko wpływają one na wartość indeksu cenowego, ale również na dokładność jego oszacowania. Na koniec zauważmy również, że sterując tymi parametrami mamy możliwość osłabienia (bądź wzmocnienia) wpływu informacji pochodzących z okresu badanego. Jest to istotne, ponieważ w literaturze przedmiotu pojawiają się prace, w których autorzy próbują osłabić ten wpływ redukując przez to efekt obciążenia szacunków *CPI* powstały przez tzw. dobra znikające (*disappearing goods)*, czyli obserwowane jedynie w okresie bazowym (Lloyd, 1975; Moutlon, 1996; Shapiro, Wilcox, 1997).

dr hab. inż. Jacek Białek — *Uniwersytet Łódzki*

LITERATURA

Balk M. (1995), *Axiomatic Price Index Theory: A Survey*, „International Statistical Review", Vol. 63, s. 69—95.

Białek J. (2010), *Uogólnione indeksy agregatowe*, „Wiadomości Statyczne", nr 10, GUS, s. 1—12.

Białek J. (2011), *Remarks about the generalizations of the Fisher index*, „Statistic in Transition — new series", Vol. 12, GUS, s. 139—154.

Białek J. (2012a), *Propozycja indeksu cen*, „Wiadomości Statystyczne", nr 7, GUS, s. 13—24.

Białek J. (2012b), *Proposition of the general formula for price indices*, „Communications in Statistics: Theory and Methods", Vol. 41, Issue 5, s. 943—952.

Białek J. (2013), *Some remarks on the original price index inspired by notes by Peter von der Lippe*, „Ekonometria", Vol. 3 (41), Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, s. 40—54.

Carli G. R. (1764), *Del valore e della proporzione de'metalli monetati*, [w:] „*Scrittori classici italiani di economia politica*", Vol. 13, Milano, G. G. Destefanis, s. 1804.

De Haan (2002), *Generalised Fisher Price Indexes and the Use of Scanner Data in the Consumer Price Index (CPI)*, „Journal of Official Statistics", Vol. 18, No. 1, s. 61—85.

Drobisch M. W. (1871), *Ueber einige Einwürfe gegen die in diesen Jahrbüchern veröffentlichte neue Methode, die Veränderungen der Waarenpreise und des Geldwerths zu berechten*, „Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik", Vol. 16, s. 416—427.

Dutot C. F. (1738), *Reflexions Politiques sur les Finances et le Commerce*, The Hague: Les Freres Vaillant et Nicolas Prevost, Vol. 1.

Edgeworth F. Y. (1887), *Measurement of Change in Value of Money I*, the first Memorandum presented to the British Association for the Advancement of Science; reprinted in *Papers Relating to Political Economy*, Vol. 1, New York, Burt Franklin, s. 1925.

[5] *CPI* (*Consumer Price Index*) — wskaźnik cen towarów i usług konsumpcyjnych.

Eichhorn W., Voeller J. (1976), *Theory of the Index. Fisher's Test Approach and Generalizations*, New York, Springer-Verlag.

Fattore M. (2010), *Axiomatic properties of geo-logarithmic price indices*, „Journal of Econometrics, Elsevier", Vol. 156 (2), s. 344—353.

Fisher I. (1922), *The Making of Index Numbers*, Boston, Houghton Mifflin.

Geary R. G. (1958), *A Note on Comparisons of Exchange Rates and Purchasing Power between Countries*, „Journal of the Royal Statistical Society", Series A 121, s. 97—99.

Hałka A., Leszczyńska A. (2011), *Wady i zalety wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych — szacunki obciążenia dla Polski*, „Gospodarka Narodowa", nr 9, s. 51—75.

Khamis S. H. (1970), *Properties and Conditions for the Existence of a new Type of Index Number*, Sankhya Series B32, s. 81—98.

Krzysztofiak M., Luszniewicz A. (1997), *Statystyka*, PWE, Warszawa.

Laspeyres E. (1864), *Hamburger Waarenpreise 1850—1863 und die californisch-australischen Geldentdeckungen seit 1848. Ein Beitrag zur Lehrevon der Geldentwertung*, „Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik", Jena 1864, Band III, s. 81—118, 209—236.

Laspeyres E. (1871), *Die Berechnung einer mittleren Waarenpreissteigerung*, „Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik", Vol. 16, s. 296—314.

Lloyd P. J. (1975), *Substitution Effects and Biases in Nontrue Price Indices*, „The American Economic Review", Vol. 65, s. 301—313.

Marshall A. (1887), *Remedies for Fluctuations of General Prices*, „Contemporary Review", Vol. 51, s. 355—375.

Martini M. (1992), *A General Function of Axiomatic Index Numbers*, „Journal of the Italian Statistics Society", Vol. 1 (3), s. 359—376.

Moulton B. R. (1996), *Constant Elasticity Cost-of-Living Index in Share-Relative Form*, unpublished.

Olt B. (1996), *Axiom und Struktur in der statistischen Preisindextheorie*, Frankfurt, Peter Lang.

Paasche H. (1874), *Über die Preisentwicklung der letzten Jahre nach den Hamburger Borsennotirungen*, „Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik", Vol. 12, s. 168—178.

Palgrave, R. H. I. (1886), *Currency and Standard of Value in England, France and India and the Rates of Exchange Between these Countries*, Memorandum submitted to the Royal Commission on Depression of trade and Industry, Third Report, Appendix B, s. 312—390.

Shapiro M. D., Wilcox D. W. (1997), *Alternative Strategies for Aggregating Prices in the CPI*, „Federal Reserve Bank of St. Louis Review", Vol. 79 (3), s. 113—125.

Sidgwick H. (1883), *The Principles of Political Economy*, London, Macmillan.

Törnqvist L. (1936), *The Bank of Finland's consumption price index*, „Bank of Finland Monthly Bulletin", No. 10, s. 1—8.

Walsh C. M. (1901), *The Measurement of General Exchange Value*, „The MacMillan Company", New York.

Welfe A. (1966), *Indeksy produkcji*, PWE, Warszawa.

White A. G. (1999), *Measurement Biases in Consumer Price Indexes*, „International Statistical Review", Vol. 67, Issue 3, s. 301—325.

Von der Lippe P. (2007), *Index Theory and Price Statistics*, Peter Lang, Frankfurt, Germany.

Von der Lippe P. (2012), *Some short notes on a price index of Jacek Białek*, „Ekonometria", Vol. 1 (35), Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, s. 76—83.

Summary. *The paper discusses the proposition of the general price index formula. It is shown that the formula satisfies postulates coming from the Martini's system of minimal requirements. It is also shown, analytically and by the simulation study, that the general formula fulfills the Laspeyres and Paasche bounding test. The conducted simulation study analyzes the volatility of the generated price index values for some fixed values of parameters.*
Keywords: price indices, axiomatic price index theory, generalization of the price index.

Резюме. *В статье было представлено и поддано обсуждению предложение общей формулы индекса цен. Было показано, что эта формула удовлетворяет ожидания системы минимальных требований Мартини. Кроме того было показано (аналитическим способом и с помощью моделирования), что охарактеризована формула отвечает критерию для границ Ласпейреса и Пааше. В симуляционном обследовании был проведен анализ вариации генерированных значений индекса в зависимости от определенных параметров компонентов.*
Ключевые слова: индексы цен, аксиоматическая теория индексов цен, обобщение индекса цен.