

STATYSTYKA W PRAKTYCE

Hanna DUDEK

Zastosowanie beta regresji w modelowaniu wskaźnika pogłębionej deprywacji materialnej w krajach Unii Europejskiej¹

Streszczenie. *Wskaźnik pogłębionej deprywacji materialnej informuje o odsetku populacji, który nie może zrealizować przynajmniej czterech z dziewięciu potrzeb uznanych w warunkach europejskich za podstawowe. W badaniu podjęto próbę identyfikacji czynników różnicujących ten wskaźnik w krajach Unii Europejskiej. Na podstawie danych z Europejskiego badania dochodów i warunków życia (EU-SILC) z 2014 r. oszacowano parametry modeli beta regresji. Modele te znajdują zastosowanie w sytuacji, gdy zmienna zależna przyjmuje wartości z przedziału (0, 1).*

Stwierdzono, że wskaźnik deprywacji materialnej wykazywał zależność od takich czynników, jak: typ gospodarstwa domowego, mediana dochodu ekwiwalentnego, zagrożenia ubóstwem relatywnym, głębokość ubóstwa, zróżnicowanie dochodów, stopy bezrobocia długoterminowego, PKB per capita oraz udziału wydatków na cele społeczne w PKB.

Słowa kluczowe: model beta regresji, wskaźnik pogłębionej deprywacji materialnej, kraje Unii Europejskiej.

JEL: I32, C25

Promowanie postępu w sferze społecznej i ekonomicznej jest jednym z priorytetów Unii Europejskiej (UE). Kwestie zwalczania ubóstwa i wykluczenia społecznego szczególnie zyskały na znaczeniu w ostatnich latach. Znalazło to od-

¹ Artykuł opracowany na podstawie referatu wygłoszonego na konferencji pt. *Statystyczny pomiar jakości życia w układach regionalnych i krajowych. Dylematy i wyzwania*, która odbyła się 2—3 października 2017 r. w Chęcinach.

zwierciedlenie w strategii *Europa 2020* na rzecz inteligentnego i zrównoważonego rozwoju sprzyjającego włączeniu społecznemu. Strategia ta, przyjęta w 2010 r., jest długookresowym programem rozwoju społeczno-gospodarczego UE na lata 2010—2020. Komisja Europejska wytyczyła kilka nadrzędnych, wymiernych celów, do których należy m.in. zmniejszenie liczby osób zagrożonych ubóstwem lub wykluczeniem społecznym do 2020 r. co najmniej o 20 mln w porównaniu z 2008 r. (Komisja Europejska, 2010). Do monitorowania realizacji tego celu wykorzystuje się trzy wskaźniki cząstkowe — pierwszy z nich obrazujący zagrożenie ubóstwem relatywnym oraz wskaźniki dotyczące osób zagrożonych pogłębioną deprivacją materialną i osób żyjących w gospodarstwach domowych o bardzo niskiej intensywności pracy. Wskaźniki te są wyznaczane na podstawie danych z *Europejskiego badania dochodów i warunków życia ludności (EU Statistics on Income and Living Conditions — EU-SILC)*.

Zgodnie z obowiązującą koncepcją w UE, o ubóstwie lub wykluczeniu społecznym można mówić wtedy, gdy występuje przynajmniej jedno z trzech następujących zagrożeń:

- 1) uzyskiwanie dochodów niższych od granicy ubóstwa, stanowiących 60% mediany rocznych dochodów ekwiwalentnych w danym kraju (po uwzględnieniu transferów społecznych);
- 2) podleganie pogłębionej deprivacji materialnej, charakteryzującej się co najmniej 4 z 9 symptomów odnoszących się do braku możliwości zaspokojenia potrzeb ze względów finansowych;
- 3) życie w gospodarstwach domowych, w których osoby dorosłe w wieku produkcyjnym (18—59 lat) w minionym roku przepracowały mniej niż 20% ich całkowitego potencjału pracy (Eurostat, 2016).

W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele krytycznych opinii dotyczących przyjętego przez Komisję Europejską zestawu wskaźników (m.in. Panek i Zwierzchowski, 2013; Topińska, 2014). Według Panka i Zwierzchowskiego trzeci ze wskaźników stanowi miarę wykluczenia społecznego w obszarze rynku pracy i nie powinien być uwzględniany w analizie ubóstwa. Ponadto wielu autorów wskazuje, że posługiwanie się wskaźnikiem ubóstwa relatywnego wyliczanego na podstawie dochodów jest wygodne, ale dyskusyjne. Według Topińskiej najwięcej wątpliwości budzi wyznaczanie granicy ubóstwa oddzielnie w każdym kraju członkowskim Unii, ponieważ takie podejście oznacza, że osoba zaliczona do biednych np. w Luksemburgu wcale nie musiałaby być uznana za ubogą w Bułgarii czy Polsce. Panek i Zwierzchowski (2016) przytaczają wyniki z opracowania Bradshawa i Mayhew (2011), z których wynika, że w 2008 r. stopa ubóstwa w Estonii i Wielkiej Brytanii była taka sama — 19%. Zwracają przy tym jednak uwagę, że granica ubóstwa dla małżeństw z 2 dziećmi w pierwszym z tych krajów wynosiła 9770 standardowych jednostek siły nabywczej UE (PPS), a w drugim — 24380 PPS, czyli niemal trzykrotnie przewyższała granicę przyjętą w Estonii. Panek i Zwierzchowski (2013) zwrócili jednak uwagę na pozytywne strony przyjętych wskaźników, podkreślili, że włączenie do oceny ubóstwa wskaźników niemonetarnych dotyczących deprivacji materialnej, stanowi znaczący krok w kierunku pełniejszej oceny ubóstwa w UE. Autorzy ci wskazują, że pomiar deprivacji materialnej, w przeciwieństwie do pomiaru ubóstwa monetarnego, odbywa się według podejścia absolutnego, w którym ocena sytuacji materialnej gospodarstw domowych nie opiera się na odniesieniu ich poziomu de-

prywacji do poziomu deprivacji innych gospodarstw domowych. Takie podejście zapewni porównywalność sytuacji bytowej pomiędzy krajami członkowskimi UE.

W artykule podjęto się analizy wskaźnika stopy pogłębionej deprivacji materialnej w państwach członkowskich UE. Wskaźnik ten pokazuje, jaki jest odsetek populacji danego kraju deklarujących brak możliwości zaspokojenia ze względów finansowych co najmniej 4 z 9 następujących potrzeb²:

- 1) opłacenia tygodniowego wyjazdu w sztych członków gospodarstwa domowego na wypoczynek raz w roku;
 - 2) spożywania mięsa, ryb (lub wegetariańskiego odpowiednika) co drugi dzień;
 - 3) ogrzewania mieszkania odpowiednio do potrzeb;
 - 4) pokrycia niespodziewanego wydatku w wysokości odpowiadającej miesięcznej wartości granicy ubóstwa relatywnego, przyjętej w danym kraju, w roku poprzedzającym badanie;
 - 5) terminowego regulowania opłat związanych z mieszkaniem, spłatą rat i kredytów
- oraz posiadania:
- 6) telewizora kolorowego;
 - 7) samochodu;
 - 8) pralki;
 - 9) telefonu (stacjonarnego lub komórkowego).

Jak wskazują Notten i Guio (2016), uwzględniany zestaw potrzeb odzwierciedla powszechną w warunkach UE percepcję w zakresie tego, co uznaje się za typowe potrzeby. Autorzy ci podkreślają, że koncentrując się na braku możliwości zaspokojenia ze względów finansowych tych potrzeb, wskaźnik pogłębionej deprivacji materialnej umożliwia bardziej bezpośredni pomiar standardu życia ludności niż wskaźniki dochodowe. Jednak niektórzy eksperci zwracają uwagę, że przyjęta przez UE definicja pogłębionej deprivacji materialnej też budzi zastrzeżenia. Obiekcje dotyczą m.in. zestawu uwzględnianych potrzeb oraz ustalenia progu pogłębionej deprivacji na poziomie 4 z 9 potrzeb (Topińska, 2014). Niemniej przyjęcie we wszystkich państwach UE jednolitego podejścia umożliwia porównywanie sytuacji materialnej ludności z różnych krajów.

Celem badania jest identyfikacja czynników wpływających na stopę pogłębionej deprivacji materialnej w krajach UE. Do realizacji tego celu zastosowano modele beta regresji przydatne w objaśnianiu kształtowania się zmiennych opisujących proporcje, stopy lub udziały.

PRZEGLĄD LITERATURY Z ZAKRESU ANALIZY EKONOMETRYCZNEJ ZJAWISKA DEPRYWACJI MATERIALNEJ

Literatura przedmiotu z zakresu identyfikacji czynników mających wpływ na podleganie deprivacji materialnej jest stosunkowo uboga. Część opracowań koncentruje się na analizie mikrodanych dotyczących zachowań jednostkowych gospodarstw domowych. W badaniach odnoszących się do deprivacji material-

² Oprócz wskaźnika stopy pogłębionej deprivacji materialnej Eurostat rozpatruje także wskaźnik stopy deprivacji materialnej odnoszący się do występowania co najmniej 3 z 9 wymienionych tu symptomów (Eurostat, 2016).

nej w krajach UE zwykle wykorzystuje się dane EU-SILC. W analizie mikro danych rozpatruje się głównie modele logitowe lub probitowe, w których zmienna binarna przyjmuje wartość 1, gdy deprivacja materialna występuje oraz 0 w przeciwnym przypadku. Przykłady takich analiz stanowią prace (Šoltés i Ulman, 2015; McKnight, 2013; Israel, 2016), w których wykazano, że na podleganie deprivacji materialnej mają wpływ cechy socjodemograficzne, takie jak wykształcenie, miejsce zamieszkania czy typ biologiczny gospodarstwa domowego oraz ekonomiczne, takie jak status na rynku pracy oraz sytuacja dochodowa. W modelach oszacowanych na podstawie łącznych mikro danych z wielu państw UE, oprócz wskazanych cech osób lub gospodarstw domowych, zwraca się uwagę na rolę determinant wynikających z sytuacji ekonomicznej kraju, m.in.: mediany dochodu ekwiwalentnego³ wyrażonej w PPS, wskaźników różnicowania dochodów ludności, stopy bezrobocia, PKB *per capita* wyrażonego w PPS, udziału wydatków na cele społeczne w PKB⁴ (Bárcena-Martín, Lacomba, Moro-Egido i Pérez-Moreno, 2014; Kis, Özdemir i Ward, 2015; Israel, 2016).

Kolejną grupę badań stanowią analizy mające na celu modelowanie stóp deprivacji materialnej w krajach UE. Do nielicznych w tym zakresie należą publikacje Calvert i Nolan (2012) oraz Kis, Özdemir i Ward (2015). W pierwszej z nich w charakterze zmiennych objaśniających uwzględniono: medianę dochodu ekwiwalentnego wyrażoną w PPS, współczynnik Giniego, wskaźnik zagrożenia ubóstwem relatywnym oraz stopę bezrobocia. W drugiej, oprócz średniego dochodu ekwiwalentnego, luki dochodowej ubogich oraz stopy zatrudnienia, rozpatrzono wiele cech dotyczących procentowego udziału w PKB wydatków na: edukację, zdrowie, emerytury, zasiłki rodzinne i dla bezrobotnych, a także oszczędności gospodarstw domowych. Ponadto wzięto pod uwagę różne cechy socjodemograficzne, takie jak: procentowe udziały w populacji danego kraju osób mających co najwyżej średnie wykształcenie, osób w młodym wieku (18—29 lat) oraz osób zamieszkujących tereny miejskie. Stwierdzono jednak, że wiele z rozpatrywanych cech nie miało istotnego wpływu na kształtowanie się wskaźnika stopy deprivacji materialnej w krajach UE. Należy przy tym zaznaczyć, że w obu wymienionych pracach wykorzystano modele liniowe, natomiast w niniejszym opracowaniu zastosowano modele beta regresji.

MODELE BETA REGRESJI

Modele beta regresji (MBR) znajdują zastosowania w sytuacji, gdy zmienna zależna przyjmuje wartości z przedziału (0, 1). Modele te są szczególnie przydatne w analizie ciągłych zmiennych losowych opisujących proporcje (stopę, udział, frakcję itp.). Zakłada się w nich, że zmienna zależna ma jeden z bardziej znanych dwuparametrowych rozkładów zdefiniowanych na przedziale jednostkowym — rozkład beta. Jak wskazuje wielu autorów, rozkład beta jest bardzo elastyczny, co umożliwia jego różnorodne zastosowanie. W zależności od wartości parametrów rozkładu, funkcja gęstości może być symetryczna, asyme-

³ Informacje na temat skal ekwiwalentności stosowanej w UE przedstawiła m.in. Dudek (2015).

⁴ Należy także nadmienić, że w literaturze przedmiotu można znaleźć wiele opracowań w zakresie czynników wpływających na ryzyko popadnięcia w ubóstwo. W szczególności, rola wydatków społecznych w ograniczeniu sfery ubóstwa w UE jest szeroko dyskutowana m.in. w pracach Mikula (2015) i Stańko (2010).

tryczna lewo- lub prawostronnie, J-kształtna lub U-kształtna (Johnson, Kotz i Balakrishnan, 1995; Gupta i Nadarajah, 2004; Fijorek, 2009).

Mimo że rozkład beta jest znany od wielu dziesięcioleci, jego wykorzystanie w analizie regresji jest stosunkowo nowe. Za pionierską pracę z zakresu modeli beta regresji uważa się zwykle opracowanie Ferrari i Cribari-Neto (2004), choć należy zaznaczyć, że w literaturze przedmiotu można znaleźć także nieco wcześniejsze opracowania: Paolino (2001) oraz Kieschnick i McCullough (2003) dotyczące tego typu modeli. Obecnie MBR mają bardzo różne zastosowanie, m.in. w bankowości (Grzybowska i Karwański, 2015; Karwański, Gostkowski i Jałowiecki, 2015), medycynie oraz psychologii (Rogers i in., 2012; Smithson i Verkuilen, 2006).

W MBR wykorzystuje się parametryzację rozkładu beta umożliwiającą bezpośrednio modelowanie wartości oczekiwanej zmiennej zależnej jako transformacji liniowej kombinacji zmiennych niezależnych. Przyjmując tę parametryzację, rozpatruje się następującą wersję rozkładu zmiennej zależnej y (Ferrari i Cribari-Neto, 2004):

$$f(y, \mu, \psi) = \frac{\Gamma(\psi)}{\Gamma(\mu)\Gamma((1-\mu)\psi)} y^{\mu\psi-1} (1-y)^{(1-\mu)\psi-1} \quad (1)$$

gdzie:

μ i ψ — parametry rozkładu, $0 < \mu < 1$, $\psi > 0$,
 Γ — funkcja gamma.

Dzięki zastosowanej postaci (1) wartość oczekiwana $E(y) = \mu$ oraz wariancja $\text{Var}(y) = \frac{\mu(1-\mu)}{1+\psi}$. Parametr ψ nazywany jest parametrem precyzji, gdyż przy stałej wartości μ , większa wartość ψ oznacza mniejszą wariancję zmiennej y .

W modelu beta regresji zakłada się, że wartość oczekiwana zmiennej objaśnianej może być wyrażona jako pewna funkcja liniowej kombinacji zmiennych objaśniających:

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} \quad (2)$$

gdzie:

$\mu_i = E(y_i | \mathbf{x}_i)$

$g(\cdot)$ — tzw. funkcja wiążąca (*link function*), będąca ściśle monotoniczną i dwukrotnie różniczkowalną funkcją $g(\cdot): (0,1) \rightarrow R$ (Carrasco, Ferrari i Arellano-Valle, 2014),

\mathbf{x}_i — wektor wartości zmiennych objaśniających dla i -tej obserwacji, $i = 1, 2, \dots, n$,

$\boldsymbol{\beta}$ — wektor parametrów.

Ponieważ $\mu_i \in (0,1)$, to należy rozważyć tylko takie przekształcenia, które gwarantują spełnienie tego warunku. W szczególności, rozpatruje się funkcje wiążące⁵:

$$\text{logit: } g(\mu_i) = \ln\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right) \quad (3)$$

$$\text{probit: } g(\mu_i) = \Phi^{-1}(\mu_i) \quad (4)$$

$$\text{cloglog: } g(\mu_i) = \ln(-\ln(1 - \mu_i)) \quad (5)$$

$$\text{loglog: } g(\mu_i) = -\ln(-\ln(\mu_i)) \quad (6)$$

Rozpatrywane funkcje wiążące są odpowiednio funkcjami odwrotnymi do dystrybuant rozkładu logistycznego, standardowego normalnego oraz rozkładów wartości ekstremalnych dla wartości minimalnych lub maksymalnych⁶. Efekty krańcowe dla warunkowej wartości oczekiwanej $\mu_i = E(y_i|x_i)$ wyznacza się zatem ze wzoru:

$$\frac{\partial E(y_i|x_i)}{\partial x_{ji}} = \frac{\partial F(\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta})}{\partial x_{ji}} = \beta_j f(\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}) \quad (7)$$

gdzie:

- $F(\cdot)$ — dystrybuanta odpowiadająca danej funkcji wiążącej,
- $f(\cdot)$ — funkcja gęstości odpowiadająca dystrybuancie $F(\cdot)$,
- x_{ij}, β_j — j -ta składowa odpowiednio wektora \mathbf{x}_i oraz $\boldsymbol{\beta}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Ze wzoru (7) wynika, że na podstawie znaku parametru β_j można wnioskować na temat kierunku wpływu j -tej zmiennej objaśniającej na warunkową wartość oczekiwaną zmiennej objaśnianej (Ramalho i Silva, 2013).

Należy także wspomnieć, że w literaturze przedmiotu można spotkać propozycje by również parametr precyzji ψ uzależnić od wartości zmiennych niezależnych (Smithson i Verkuilen, 2006; Simas, Barreto-Souza i Rocha, 2010). W niniejszym opracowaniu jednak ograniczono się do modelowania warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej zależnej.

Parametry MBR mogą być szacowane metodą największej wiarygodności. Zgodnie ze wzorem (1) logarytm funkcji wiarygodności ma następującą postać:

⁵ Więcej informacji na temat funkcji wiążących w MBR można znaleźć w pracach (Ramalho E. A., Ramalho J. J. S. i Murteira, 2011; Pereira, B. de B. i Pereira, C. A. de B., 2016).

⁶ W polskojęzycznej literaturze statystycznej rozkłady wartości ekstremalnych dla wartości minimalnych lub maksymalnych bywają także nazywane standaryzowanymi rozkładami Gumbela dla wartości minimalnych lub maksymalnych (Kończak, 2013).

$$\ln L = \sum_{i=1}^n (\ln \Gamma(\psi) - \ln \Gamma(\mu_i \psi) - \ln \Gamma((1 - \mu_i) \psi) + (\mu_i \psi - 1) \ln y_i + ((1 - \mu_i) \psi - 1) \ln(1 - y_i)) \quad (8)$$

gdzie:

n — liczebność próby,

y_i — wartość zmiennej zależnej dla i -tej jednostki,

$\mu_i = g^{-1}(x_i' \beta)$.

Oszacowań parametrów β oraz ψ dokonuje się numerycznie. Obecnie wiele pakietów statystycznych umożliwia estymację parametrów MBR⁷. W pracy wykorzystano w tym celu program Stata. Po oszacowaniu parametrów modeli wyznaczono współczynniki pseudo- R^2 proponowane w literaturze przedmiotu do oceny jakości dopasowania MBR do danych empirycznych (Ferrari i Cribari-Neto, 2004; Bayer i Cribari-Neto, 2017):

$$\text{pseudo-}R_{LR}^2 = 1 - \left(\frac{L_0}{L_{fit}} \right)^{\frac{2}{n}} \quad (9)$$

gdzie:

L_{fit} — wartość funkcji wiarygodności oszacowanego modelu,

L_0 — wartość funkcji wiarygodności modelu zawierającego jedynie stałą.

oraz

$$\text{pseudo-}R_{FC}^2 = r(\mathbf{g}(y), \mathbf{g}(\hat{\mu}))^2 \quad (10)$$

gdzie:

r — współczynnik korelacji Pearsona,

$\mathbf{g}(y)$ — wektor wartości funkcji wiążącej dla zmiennej y ,

$\mathbf{g}(\hat{\mu})$ — wektor wartości $\mathbf{g}(\hat{\mu}_i) = x_i' \hat{\beta}$,

$\hat{\beta}$ — wektor oszacowań parametrów β .

Wartości obu współczynników pseudo- R^2 zawierają się w przedziale jednostkowym. Wyższe wartości wskazują na lepsze dopasowanie do danych empirycznych.

⁷ W szczególności estymację parametrów modelu beta regresji można przeprowadzić w programie Stata, systemie SAS oraz środowisku R.

DANE

W badaniu wykorzystano dane Eurostatu, który udostępnia dane zagregowane o stopie pogłębionej deprywacji materialnej dla poszczególnych krajów, jak również według grup ludności. W opracowaniu zdecydowano uwzględnić dane dotyczące różnych typów gospodarstw domowych, gdyż w takim podziale dodatkowo Eurostat publikuje informacje o medianie dochodów ekwiwalentnych oraz wskaźniku zagrożenia ubóstwem relatywnym. Wykorzystanie zatem tego typu danych wzbogaca analizę zjawiska pogłębionej deprywacji materialnej. Rozpatrzono różne typy gospodarstw domowych składające się z:

- 2 osób dorosłych z 1 dzieckiem na utrzymaniu,
- 2 osób dorosłych z 2 dziećmi na utrzymaniu,
- 2 osób dorosłych z co najmniej 3 dziećmi na utrzymaniu,
- 2 osób dorosłych bez dzieci na utrzymaniu,
- 3 lub więcej osób dorosłych bez dzieci na utrzymaniu,
- 3 lub więcej osób dorosłych z dziećmi na utrzymaniu,
- samotnej osoby dorosłej,
- samotnej osoby dorosłej z dziećmi na utrzymaniu.

Łącznie dysponowano 224 obserwacjami (8 typów gospodarstw w 28 krajach) na temat wskaźnika pogłębionej deprywacji materialnej, mediany dochodów ekwiwalentnych i wskaźnika zagrożenia ubóstwem relatywnym. W odniesieniu do pozostałych potencjalnych determinant rozpatrzono dane zagregowane na poziomie krajowym. Uwzględniono następujące cechy:

- PKB *per capita* wyrażony w parytecie siły nabywczej w tys. jednostek;
- stopę bezrobocia długoterminowego w % (udział osób bezrobotnych co najmniej 12 miesięcy w łącznej liczbie osób aktywnych zawodowo);
- udział wydatków na pomoc społeczną w PKB w %;
- wskaźnik zróżnicowania kwintylowego⁸ (nierówności rozkładu dochodów S80/S20);
- współczynnik Giniego;
- wskaźnik głębokości ubóstwa (średniej luki dochodowej ubogich⁹).

Ze względu na brak danych na temat wartości niektórych cech dla 2015 r. w opracowaniu wykorzystano dane z 2014 r.

Należy nadmienić, że w analizie ekonometrycznej można by było rozważyć zastosowanie także innych modeli, m.in. hierarchicznych uwzględniających dwupoziomowość uzyskanych danych z Eurostatu. Trzeba jednak podkreślić, że prezentowane opracowanie jest pierwszą próbą modelowania wskaźnika pogłębionej deprywacji materialnej za pomocą beta regresji i stanowi punkt wyjścia do dalszych badań.

⁸ Wskaźnik ten jest stosunkiem sumy dochodów uzyskanych przez 20% osób o najwyższych dochodach (z piątej grupy kwintylowej) do sumy dochodów uzyskanych przez 20% osób o najniższych dochodach (z pierwszej grupy kwintylowej).

⁹ Wskaźnik ten informuje, o ile przeciętne dochody ekwiwalentne gospodarstw ubogich są niższe od granicy ubóstwa.

PREZENTACJA WYNIKÓW ORAZ DYSKUSJA NAD NIMI

Według danych Eurostatu w 2014 r. pomiędzy krajami członkowskimi UE wystąpiły znaczne różnice w zakresie deprivacji materialnej — największą stopę pogłębionej deprivacji materialnej notowano w Bułgarii (33,1%), a najmniejszą w Szwecji (0,7%). Polska należała do krajów o umiarkowanym poziomie deprivacji materialnej (10,4%). Nie zaobserwowano wyraźnego podziału między 10 krajami, które przystąpiły do UE w 2004 r. lub później (UE-16), oraz tzw. starymi krajami (UE-12). Porządkując kraje od najniższej, wartości wskaźnika stopy pogłębionej deprivacji materialnej do najwyższej można zauważyć, że Grecja, Włochy i Portugalia znalazły się w drugiej połowie tego rankingu¹⁰, natomiast Estonia, Słowenia i Czechy — w pierwszej. Trzeba jednak przyznać, że większość krajów UE-12 uplasowało się na niskich pozycjach, natomiast znaczna część krajów UE-16 — na wysokich.

W tabl. 1 przedstawiono podstawową statystykę opisową zmiennej objaśniającej. Zgodnie z wymogiem modelu beta regresji, wartości tej zmiennej należą do przedziału (0, 1).

**TABL. 1. PODSTAWOWE STATYSTYKI OPISOWE
WSKAŹNIKA POGŁĘBIONEJ DEPRYWACJI MATERIALNEJ**

| Statystyki opisowe | Wartości wskaźnika |
|----------------------------|--------------------|
| Miary położenia | |
| Średnia arytmetyczna | 0,122 |
| Mediana | 0,088 |
| Miary zróżnicowania | |
| Odchylenie standardowe | 0,177 |
| Rozstęp | 0,892 |

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Z tabl. 1 wynika, że pomiędzy analizowanymi wartościami wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej wystąpiły znaczne różnice. Odchylenie standardowe przewyższające średnią oznacza, że współczynnik zmienności dla analizowanej cechy jest większy niż 100%, natomiast rozstęp równy 0,892 wskazuje, że rozpiętość między najmniejszą a największą wartością wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej wyniosła 89,2 p.proc. Najmniejsze wartości odnosiły się do duńskich oraz szwedzkich gospodarstw domowych składających się z co najmniej 3 osób dorosłych bez dzieci na utrzymaniu, natomiast największe — do bułgarskich gospodarstw składających się z 2 osób dorosłych z co najmniej 3 dzieci na utrzymaniu. Średnio stopa pogłębionej deprivacji materialnej kształtowała się na umiarkowanym poziomie 12%, przy czym dla ok. 50% obserwacji nie przewyższała 9%.

¹⁰ Końcowe miejsca Grecji, Włoch i Portugalii w rankingach dotyczących warunków materialnych ludności odnotowano także w innych publikacjach, m.in. Dudek, Landmesser i Chrzanowskiej (2017) oraz Kozery, Stanisławskiej i Głowickiej-Wołoszyn (2017), natomiast wysoką pozycję Czech potwierdzono także w pracach: Chrzanowskiej, Dudek i Landmesser (2017); Kozery, Stanisławskiej i Głowickiej-Wołoszyn (2017) oraz Dudek, Landmesser i Chrzanowskiej (2017).

W celu wskazania czynników mogących wpływać na wielkość wskaźnika pogłębionej deprywacji materialnej, rozpatrzono wiele modeli z różnymi zestawami regresorów. W pierwszej kolejności oszacowano modele zawierające zmienne objaśniające, dla których posiadano dane według typów gospodarstw domowych. Zmienne te dotyczyły mediany dochodów ekwiwalentnych i wskaźnika zagrożenia ubóstwem relatywnym. Następnie zbudowano modele ze zmiennymi objaśniającymi, dla których dysponowano danymi w układzie krajowym. Rozpatrzono dwa modele — pierwszy uwzględniający informacje o rozkładzie dochodów gospodarstw domowych, drugi zaś zawierający zmienne odnoszące się do cech makroekonomicznych.

W tabl. 2 podano wyniki w zakresie porównania modeli z różnymi funkcjami wiążącymi, opisanymi wzorami (3)—(6). Porównanie dotyczyło modeli z taką samą liczbą zmiennych objaśniających oszacowanych na podstawie identycznych zbiorów danych — nie było zatem potrzeby wykorzystywania kryteriów informacyjnych, takich jak AIC (Akaike Information Criterion) lub BIC (Bayesian Information Criterion), wystarczyło zestawienie wartości logarytmów wiarygodności.

**TABL. 2. WARTOŚCI LOGARYTMU WIARYGDNOŚCI
DLA MODELI BETA REGRESJI Z RÓŻNYMI FUNKCJAMI WIĄŻĄCYMI**

| Modele | Logit | Probit | Cloglog | Loglog |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 376,600 | 379,754 | 372,866 | 379,995 |
| 2 | 377,086 | 379,772 | 373,721 | 379,144 |
| 3 | 290,393 | 290,316 | 290,477 | 290,061 |
| 4 | 307,957 | 306,376 | 308,658 | 305,218 |

Ź r ó d ł o: jak w tabl. 1.

Na podstawie wyników przedstawionych w tabl. 2 można stwierdzić, że najwyższe wartości logarytmu wiarygodności w modelu 1 odpowiadają funkcji łączącej typu loglog, w modelu 2 — funkcji probit, natomiast w modelach 3 i 4 — funkcji cloglog. W zawiązku z tym w tabl. 3 — prezentującej wyniki oszacowań parametrów — zamieszczono jedynie rezultaty otrzymane odpowiednio dla modeli z tymi funkcjami łączącymi.

TABL. 3. WYNIKI ESTYMACJI MBR

| Zmienne | Modele | | | |
|--|--------|---|---------------------|---------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| PKB per capita | — | — | — | -4,093** (2,075) |
| Bezrobocie długoterminowe | — | — | — | 4,154** (1,833) |
| Odsetek wydatków na pomoc społeczną w PKB | — | — | — | -3,375** (1,867) |
| Współczynnik Giniego | — | — | 6,640*** (2,927) | — |
| Wskaźnik głębokości ubóstwa | — | — | 5,788*** (1,787) | — |

TABL. 3. WYNIKI ESTYMACJI MBR (dok.)

| Zmienne | Modele | | | |
|---|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Wskaźnik zagrożenia ubóstwem relatywnym | 0,833** (0,423) | — | — | — |
| Logarytm mediany dochodu ekwiwalentnego | -0,560*** (0,071) | -0,721*** (0,098) | — | — |
| Iloczyn wskaźnika zagrożenia ubóstwem relatywnym i logarytmu mediany dochodu ekwiwalentnego | — | 0,101** (0,051) | — | — |
| Gospodarstwa jednoosobowe | 0,084 (0,060) | 0,127* (0,075) | — | — |
| Gospodarstwa składające się z: | | | | |
| 2 osób dorosłych | 0,089*** (0,029) | 0,123*** (0,038) | — | — |
| 2 osób dorosłych z 1 dzieckiem na utrzymaniu | 0,069*** (0,015) | 0,069*** (0,021) | — | — |
| 2 osób dorosłych z 2 dziećmi na utrzymaniu | Ref. | Ref. | — | — |
| 2 osób dorosłych z co najmniej 3 dziećmi na utrzymaniu | 0,042 (0,059) | 0,079 (0,073) | — | — |
| co najmniej 3 osób dorosłych | 0,138*** (0,035) | 0,181*** (0,044) | — | — |
| co najmniej 3 osób dorosłych z dziećmi na utrzymaniu | 0,092*** (0,035) | 0,130*** (0,046) | — | — |
| samotnej osoby dorosłej z dziećmi na utrzymaniu | 0,172* (0,095) | 0,241** (0,114) | — | — |
| Stała | 4,218*** (0,684) | 5,215*** (0,935) | -5,456*** (0,832) | -0,375 (0,431) |
| Parametr precyzji | 29,683*** (7,423) | 29,290*** (6,699) | 12,423*** (2,710) | 15,074*** (3,419) |
| pseudo- R^2_{LR} | 0,708 | 0,707 | 0,359 | 0,448 |
| pseudo- R^2_{FC} | 0,717 | 0,711 | 0,346 | 0,490 |

U w a g a. Istotność na poziomie: * — 0,1, ** — 0,05, *** — 0,01. W nawiasach podano standardowe błędy szacunku parametrów skorygowane ze względu na pogrupowanie obserwacji w krajach (wykorzystano opcję „clustered robust standard errors” w programie Stata).

Ź r ó d ł o: jak w tabl. 1.

Analizując współczynniki pseudo- R^2 , należy odnotować znacznie lepsze dopasowania do danych empirycznych modeli 1 i 2 niż modeli 3 i 4. W pierwszych dwóch modelach uwzględniono zmienne objaśniające, dla których dysponowano wartościami w podziale na typy gospodarstw domowych. Wyniki oszacowań parametrów modelu 1 są zgodne z oczekiwaniami — wzrost mediany dochodów ekwiwalentnych korespondował ze spadkiem wartości oczekiwanej wskaźnika pogłębionego ubóstwa materialnego¹¹, natomiast zwiększenie odsetka osób w gospodarstwach uzyskujących dochody niższe od granicy ubóstwa z jej wzro-

¹¹ Uzyskany wynik jest uzasadniony — dochody ludności pełnią bowiem podstawową funkcję w kształtowaniu się konsumpcji (m.in. Utzig, 2008).

stem. W modelu 2 wzięto pod uwagę interakcję obu cech, uzyskując dodatnią ocenę¹². Oznacza to, że wyższym wskaźnikom zagrożenia ubóstwem relatywnym odpowiadał mniejszy spadek wartości oczekiwanej stopy pogłębionej deprivacji materialnej, spowodowany wzrostem mediany dochodów ekwiwalentnych. Wynik ten znajduje uzasadnienie, gdyż mediana odnosi się do średniej sytuacji grupy osób należących do danego typu gospodarstw domowych w poszczególnych krajach, natomiast wskaźnik zagrożenia ubóstwem relatywnym — do grupy osób w danym typie gospodarstw domowych będącej w każdym z krajów w relatywnie najtrudniejszej sytuacji dochodowej. Możliwe jest zatem by mimo przeciętnie dobrej sytuacji dochodowej w obrębie danego typu gospodarstw w niektórych krajach zasięg ubóstwa relatywnego był znaczny, co może skutkować wysokimi wartościami wskaźnika pogłębionego ubóstwa materialnego. Analizując dane źródłowe zaobserwowano, że sytuacja taka miała miejsce m.in. w gospodarstwach osób samotnych z dziećmi na utrzymaniu w Irlandii, Wielkiej Brytanii, Belgii oraz we Włoszech.

Biorąc pod uwagę wyniki oszacowań parametrów odpowiadających zmien-nym zero-jedynkowym (reprezentującym rozpatrywane typy gospodarstw), odnotowano, że w porównaniu do gospodarstw domowych składających się z 2 osób dorosłych z 2 dziećmi na utrzymaniu, pozostałe typy gospodarstwa charakteryzowały się większymi wartościami oczekiwanymi wskaźników pogłębionej deprivacji materialnej, przy czym nie zawsze zaobserwowane różnice były statystycznie istotne. Może nieco dziwić brak istotnych różnic między niektórymi typami, w szczególności między gospodarstwami 2 osób dorosłych z co najmniej 3 dziećmi na utrzymaniu oraz gospodarstw 2 osób dorosłych z 2 dziećmi na utrzymaniu. Trzeba jednak podkreślić, że interpretując ten wynik należy pamiętać o założeniu *ceteris paribus*. Warto bowiem zaznaczyć, że analizując dane źródłowe zaobserwowano wyraźnie wyższe wartości stopy pogłębionej deprivacji materialnej dla gospodarstw domowych 2 osób dorosłych z co najmniej 3 dziećmi na utrzymaniu niż dla gospodarstw 2 osób dorosłych z 2 dziećmi na utrzymaniu. Jednocześnie dochody w pierwszej grupie gospodarstw były jednak znacznie niższe niż w drugiej, natomiast w stosunku do zasięgu zagrożenia ubóstwem relatywnym odnotowano odwrotną relację.

Na podstawie rezultatów estymacji modelu 3 można stwierdzić, że na wzrost oczekiwanych wartości wskaźnika stopy pogłębionej deprivacji miały wpływ zwiększające się nierówności dochodowe ludności¹³ oraz głębokość ubóstwa monetarnego. Wynik ten ma uzasadnienie, gdyż znaczne różnice dochodowe w społeczeństwie mogą przyczyniać się do gorszego postrzegania własnych możliwości zaspokojenia potrzeb ze względów finansowych. Ponadto większa głębokość ubóstwa świadczy jednocześnie o większym dystansie dochodowym gospodarstw nim dotkniętych do granicy ubóstwa monetarnego, co zwykle wpływa na trudności w zaspokojeniu podstawowych potrzeb tych gospodarstw.

¹² W modelu 2 nie uwzględniono w charakterze zmiennej objaśniającej wskaźnika zagrożenia ubóstwem relatywnym ze względu na jego znaczną korelację z czynnikiem opisującym interakcję (współczynnik korelacji Pearsona przekraczał wartość 0,9).

¹³ Wykorzystanie w charakterze miernika zróżnicowania dochodowego współczynnika S80/S20 zamiast współczynnika Giniego skutkowało niższą jakością dopasowania modelu do danych empirycznych.

Oszacowania parametrów modelu 4 wskazują, że na zwiększenie oczekiwanych wartości wskaźnika stopy pogłębionej deprivacji wpływał wzrost bezrobocia długoterminowego, natomiast na spadek — wzrost wartości PKB *per capita* oraz procentowych udziałów wydatków na cele społeczne w PKB. W celu wskazania wartości liczbowych zmian oczekiwanych wartości wskaźnika pogłębionego ubóstwa materialnego odpowiadających wzrostowi cech makroekonomicznych, zgodnie ze wzorem (7), w tabl. 4 zamieszczono wyniki efektów krańcowych obliczonych dla kwartyli rozkładu danej zmiennej, przyjmując wartość pozostałych zmiennych objaśniających na poziomie mediany.

TABL. 4. EFEKTY MARGINALNE

| Zmienne | Pierwszy kwartyl | Mediana | Trzeci kwartyl |
|---|---------------------|---------------------|---------------------|
| PKB <i>per capita</i> w tys. PPP | -0,525 (0,351) | -0,451* (0,267) | -0,320** (0,132) |
| Odsetek wydatków na pomoc społeczną w PKB | -0,480* (0,281) | -0,411** (0,209) | -0,334** (0,134) |
| Bezrobocie długoterminowe | 0,432*** (0,155) | 0,457*** (0,175) | 0,515** (0,224) |

U w a g a. Istotność na poziomie: * — 0,1, ** — 0,05, *** — 0,01. W nawiasach podano standardowe błędy szacunku parametrów skorygowane ze względu na pogrupowanie obserwacji w krajach (wykorzystano opcję „clustered robust standard errors” w programie Stata).

Ź r ó ł o: jak w tabl. 1.

Wyniki przedstawione w tabl. 4 umożliwiają analizę zmian wartości oczekiwanych wskaźnika pogłębionego ubóstwa materialnego w zależności od wartości zmiennych objaśniających, przy czym należy zaznaczyć, że zarówno wskaźnik pogłębionej deprivacji materialnej, jak i odsetek wydatków na pomoc społeczną w PKB oraz wskaźnik bezrobocia długoterminowego wyróżniono jako liczby z przedziału (0, 1). W szczególności, wyniki uzyskane dla wartości tych zmiennych na poziomie mediany można, przy założeniu *ceteris paribus*, następująco interpretować:

- wzrostowi PKB *per capita* o 1 PPP towarzyszył spadek wartości oczekiwanej wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej o ok. 0,045 p.proc.,
- wzrost odsetka wydatków na pomoc społeczną w PKB o 1 p.proc. korespondował ze spadkiem wartości oczekiwanej wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej o ok. 0,411 p.proc.,
- zwiększeniu stopy bezrobocia długoterminowego o 1 p.proc. odpowiadało zwiększenie wartości oczekiwanej wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej o ok. 0,457 p.proc.

W celu porównania siły oddziaływania rozpatrywanych cech makroekonomicznych na stopę pogłębionej deprivacji materialnej zestawiono wartości logarytmu wiarygodności dla modeli uwzględniających pojedyncze zmienne. Porównując te wartości z wartością logarytmu wiarygodności dla modelu zawierającego jedynie stałą, zaobserwowano największy wpływ cechy PKB *per capita* (wzrost o 24%). Dla pozostałych cech odnotowano mniejsze zmiany: udział wydatków na pomoc społeczną w PKB spowodował zwiększenie logarytmu wiary-

godności o 12%, a stopa bezrobocia długoterminowego spowodowała zwiększenie o 8%. Należy jednak zauważyć, że PKB *per capita* jest silnie skorelowany z dochodami ludności¹⁴, trudno zatem jednoznacznie orzekać o bezpośrednim przyczynowym wpływie pierwszej z tych cech na kształtowanie się zjawiska pogłębionej deprivacji materialnej, natomiast wątpliwości te w mniejszym stopniu odnoszą się do udziału wydatków na pomoc społeczną w PKB oraz stopy bezrobocia długoterminowego.

Podsumowanie

Wskaźnik pogłębionej deprivacji materialnej jest jednym ze wskaźników uwzględnianych w pomiarze zagrożenia ubóstwem lub wykluczeniem społecznym dla potrzeb monitorowania realizacji celów założonych w strategii *Europa 2020*. Wskaźnik ten uwzględnia brak możliwości zaspokojenia co najmniej 4 z 9 potrzeb uznanych w warunkach europejskich za podstawowe. Z uwagi na fakt, że analizowany wskaźnik dotyczy procentowych udziałów w populacji danego kraju osób podlegających pogłębionej deprivacji materialnej, w badaniu zastosowano modele beta regresji przydatne w objaśnianiu kształtowania się zmiennych opisujących proporcje, stopy lub udziały. Stwierdzono istotną zależność stopy podlegających pogłębionej deprivacji materialnej od dochodów ekwiwalentnych ludności, wskaźnika zagrożenia ubóstwem relatywnym, nierówności dochodowych oraz głębokości ubóstwa. Wskazano także na znaczną rolę cech makroekonomicznych, takich jak PKB *per capita*, stopa bezrobocia długoterminowego oraz udziału wydatków na pomoc społeczną w PKB.

W przyszłych badaniach warto nadal monitorować zmiany wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej. Taka analiza umożliwiłaby ocenę stopnia realizacji jednego z celów określonych w strategii *Europa 2020*.

dr hab. Hanna Dudek — profesor SGGW

LITERATURA

- Bárcena-Martín, E., Lacomba, B., Moro-Egido, A. I., Pérez-Moreno, S. (2014). Country differences in material deprivation in Europe. *Review of Income and Wealth*, 60, 802—820.
- Bayer, F. M., Cribari-Neto, F. (2017). Model selection criteria in beta regression with varying dispersion. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 46(1), 729—746.
- Bradshaw, J., Mayhew, E. (2011). *The measurement of extreme poverty in the European Union*, Bruksela: European Commission, Directorate-General for Employment, Social Affairs and Inclusion.
- Calvert, E., Nolan, B. (2012). Material deprivation in Europe. *GINI Discussion Paper*, 68.
- Carrasco, J. M. F., Ferrari, S. L. P., Arellano-Valle, R. B. (2014). Errors-in-variables beta regression models. *Journal of Applied Statistics*, 41(7), 1530—1547.
- Chrzanowska, M., Dudek, H., Landmesser, J. (2017). Standard of living in selected countries in Central Europe in the period 2000—2014, *Double-blind peer-reviewed proceedings of the International Scientific Conference Hradec Economic Days 2017*, 7(1), 325—331.
- Dudek, H. (2015). Problem stosowania jednolitych skal ekwiwalentności w analizie sytuacji dochodowej gospodarstw domowych w Unii Europejskiej. *Wiadomości Statystyczne*, (9), 77—94.

¹⁴ Wartość współczynnika korelacji Pearsona między PKB *per capita* a dochodami ekwiwalentnymi wyniosła 0,78.

- Dudek, H., Landmesser, J., Chrzanowska, M. (2017). Rankings of the EU countries according to material conditions of their residents, *Double-blind peer-reviewed proceedings of the International Scientific Conference Hradec Economic Days 2017*, 7(1), 145—152.
- Eurostat (2016). Statistics explained: People at risk of poverty or social exclusion. Pobrano z: http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/People_at_risk_of_poverty_or_social_exclusion.
- Ferrari, S., Cribari-Neto, F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, 31(7), 799—815.
- Fijorek, K. (2009). Model regresji dla cechy przyjmującej wartości z przedziału (0, 1): ujęcie bayesowskie. *Ekonometria*, (26), 66—76.
- Grzybowska, U., Karwański, M. (2015). Szacowanie parametrów ryzyka kredytowego przy użyciu rodzin klasyfikatorów. *Studia Ekonomiczne, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*, (248), 107—120.
- Gupta, A. K., Nadarajah, S. (red.). (2004). *Handbook of beta distribution and its applications*. New York: Marcel Dekker.
- Israel, S. (2016). More than cash: societal influences on the risk of material deprivation. *Social Indicators Research*, 129(2), 619—637.
- Johnson, N. L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1995). *Continuous univariate distributions*, 2. New York: Wiley.
- Karwański, M., Gostkowski, M., Jałowiecki, P. (2015). Loss given default modeling. *Journal of Risk Model Validation*, 9(3), 23—40.
- Kieschnick, R., McCullough, B. D. (2003). Regression analysis of variates observed on (0, 1): percentages, proportions and fractions. *Statistical Modelling*, 3, 193—213.
- Kis, A., Özdemir, E., Ward, T. (2015). Micro and macro drivers of material deprivation rates. *Research note of European Commission*, (7).
- Komisja Europejska (2010). *Komunikat Komisji — Europa 2020: Strategia na rzecz inteligentnego i zrównoważonego rozwoju sprzyjającego włączeniu społecznemu*. Pobrano z: http://ec.europa.eu/eu2020/pdf/1_PL_ACT_part1_v1.pdf.
- Kończak, G. (2013). Sprawdzanie jednorodności jakości materiałów niekształtnych z wykorzystaniem rozkładów wartości ekstremalnych. *Studia Ekonomiczne, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*, (152), 82—94.
- Kozera, A., Stanisławska, J., Głowicka-Wołoszyn, R. (2017). Zjawisko ubóstwa mieszkaniowego w krajach Unii Europejskiej. *Wiadomości Statystyczne*, (1), 77—89.
- McKnight, A. (2013). Measuring material deprivation over the economic crisis: Does a re-evaluation of need affect measures of material deprivation? *GINI Policy Paper*, (4).
- Mikuła, A. (2015). Efektywność państwa dobrobytu. W: R. W. Ciborowski, R. I. Dziemianowicz, A. Kargol-Wasiluk, M. Zalesko (red.). *Liberalizm czy interwencjonizm? Kształtowanie się ładu społeczno-gospodarczego w Europie w latach 1989—2014* (s. 48—60). Białystok: Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku.
- Notten, G., Guio, A.-C. (2016). The impact of social transfers on income poverty and material deprivation. *ImPRovE Working Paper*, (16/17). Antwerp: Herman Deleeck Centre for Social Policy — University of Antwerp, 1—31.
- Panek, T., Zwierzchowski, J. (2013). Porównawcza analiza sfery ubóstwa w krajach UE w ujęciu regionalnym. *Instytut Statystyki i Demografii SGH, Working Paper*, (35).
- Panek, T., Zwierzchowski, J. (2016). Ubóstwo w krajach Unii Europejskiej, *Ekonomista*, (2), 180—199.
- Paolino, P. (2001). Maximum likelihood estimation of models with beta-distributed dependent variables. *Political Analysis*, 9(4), 325—346.
- Pereira, B. de B.; Pereira, C. A. de B. (2016). *Model Choice in Nonnested Families*. London: Springer.
- Ramalho, E. A., Ramalho, J. J. S., Murteira, J. M. R. (2011). Alternative estimating and testing empirical strategies for fractional regression models. *Journal of Economic Surveys*, 25(1), 19—68.
- Ramalho, J. J. S., Silva, J. V. (2013). Functional form issues in the regression analysis of financial leverage ratios. *Empirical Economics*, 44(2), 799—831.

- Rogers, J. A., Polhamus, D., Gillespie, W. R., Ito, K., Romero K., Qiu, R., Stephenson, D., Gastonguay, M. R., Corrigan, B. (2012). Combining patient-level and summary-level data for Alzheimer's disease modeling and simulation: a beta regression meta-analysis. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 39(5), 479—498.
- Simas, A. B., Barreto-Souza, W., Rocha, A. V. (2010). Improved estimators for a general class of beta regression models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54(2), 348—366.
- Smithson, M., Verkuilen, J. (2006). A better lemon squeezer? Maximum-likelihood regression with beta-distributed dependent variables. *Psychological Methods*, 11(1), 54—71.
- Šoltés, E., Ulman, P. (2015). Material deprivation in Poland and Slovakia — a comparative analysis. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, 11(947), 19—36.
- Stańko, A. (2010). Wielkość oraz struktura wydatków społecznych w krajach Unii Europejskiej. *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, (112), 726—739.
- Topińska, I. (2014). Cele w zakresie ubóstwa i wykluczenia społecznego w perspektywie 2020. Ekspertyza przygotowana w ramach projektu EAPN Polska — wspólnie budujemy Europę Socjalną, Warszawa: EAPN. Pobrano z: http://www.eapn.org.pl/wp-content/uploads/2014/02/Ekspertyza_I_Topi%C5%84ska.pdf.
- Utzig, M. (2008). Funkcje konsumpcji w krajach Unii Europejskiej. *Zeszyty Naukowe SGGW w Warszawie, Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej*, (72), 131—144.

Summary. *The severe material deprivation rate indicates the proportion of the population that cannot fulfil at least four of the nine needs identified as basic ones in the European conditions. The study attempts to identify factors differentiating this indicator in the European Union countries. The parameters for regression beta models were estimated on the basis of data from the European Survey of Income and Living Conditions (EU-SILC) for 2014. Such models are useful when the value of the dependent variable interval is included between 0 and 1.*

It was found that severe material deprivation rate is affected by such factors as: type of household, median equalized disposable income, at-risk-of-poverty rate, relative median at-risk-of-poverty gap, inequality of income distribution, long-term unemployment rate, GDP per capita, and share of social protection expenditure in GDP.

Keywords: beta regression model, severe material deprivation rate, EU countries.